·基础学科·

关于 Chebyshev 多项式的 H-循环矩阵谱范数

邱 涛，雷 林*，何承源
（西华大学理学院，四川 成都 610039）

摘 要：利用 Chebyshev 多项式的性质和矩阵基本理论，研究了包含 Chebyshev 多项式的 H-循环矩阵欧式范数及谱范数，给出了第一、二类 Chebyshev 多项式的 H-循环矩阵谱范数的上下界估计。

关键词：H-循环矩阵；Chebyshev 多项式；欧几里得范数；谱范数

中图分类号：O241.6 **文献标志码**：A **文章编号**：1673–159X(2020)02 − 0106 − 07

doi:10.12198/j.issn.1673 − 159X.3232

Research on the Spectral Norms of H-circulant Matrices with Chebyshev Polynomials

QIU Tao, LEI Lin*, HE Chengyuan
（*School of Science*, *Xihua University*, *Chengdu* 610039 *China*）

Abstract: Using the properties of Chebyshev polynomials and the basic theory of matrices, the Euclidean norm and spectral norm of H-circulant matrices containing Chebyshev polynomials are studied. The upper and lower bounds for the spectral norms of H-circulant matrix are given, which entrance are the first and second class Chebyshev polynomials.

Keywords: H-circulant matrices； Chebyshev polynomials； Euclidean norm； spectral norm

1 预备知识

近年来，国内外许多学者研究了循环矩阵的范数。沈守强等[1]研究了包含 Fibonacci 数列和 Lucas 数列 r-循环矩阵谱范数；文献 [2 − 6] 推广探究了其他特殊数列的 r-循环矩阵范数，包括 hyper harmonic 数列、Pell 和 Pell-Lucas 数列、Jacobsthal 和 Jacobsthal-Lucas 数列等；Yu 等[7]建立了 H-循环矩阵$\boldsymbol{A}=RFMLRcircfr$ $(a_0,a_1,\cdots a_{n-1})$的谱范数上下界估计方法，其中数列a_n包括 Fermat 数列、Mersenne 数列以及 Gaussian Fibonacci 数列；师白娟[8]研究了两类 Chebyshev 多项式的 r-循环矩阵谱范数。

受上述研究启发，本文研究包含第一、二类 Chebyshev 多项式的 H-循环矩阵欧式范数以及谱范数[9 − 14]，通过代数计算给出了谱范数的上下界。

收稿日期：2019 − 03 − 29
基金项目：四川省应用基础研究计划(2013JY0178)。
第一作者：邱涛(1994—)，男，助教，硕士，主要研究方向为矩阵理论及应用。
ORCID：0000 − 0003 − 0854 − 139X E-mail：qiutao0206@163.com
* **通信作者**：雷林(1995—)，女，助教，硕士，主要研究方向为矩阵理论及应用。
ORCID：0000 − 0002 − 6906 − 7006 E-mail：leilinpanssye@163.com

引用格式：邱涛，雷林，何承源. 关于 Chebyshev 多项式的 H-循环矩阵谱范数[J]. 西华大学学报(自然科学版)，2020，39(2)：106 − 112.
QIU Tao, LEI Lin, HE Chengyuan. Research on the Spectral Norms of H-circulant Matrices with Chebyshev Polynomials[J]. Journal of Xihua University(Natural Science Edition), 2020, 39(2): 106 − 112.

第一、二类 Chebyshev 多项式[9] 的具体表达式为:

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),$$
$$U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$$

其线性递推关系为:

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x),$$
$$U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x)$$

由递推关系不难得到第一、二类 Chebyshev 多项式的前几项:

$$\begin{array}{ll} T_0(x)=1 & U_0(x)=1 \\ T_1(x)=x & U_1(x)=2x \\ T_2(x)=2x^2-1 & U_2(x)=4x^2-1 \\ T_3(x)=4x^3-3x & U_3(x)=8x^3-4x \\ T_4(x)=8x^4-8x^2+1 & U_4(x)=16x^4-12x^2+1 \\ T_5(x)=16x^5-20x^3+5x & U_5(x)=32x^5-32x^3+8x \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

$\{T_0(x)\}$与$\{U_0(x)\}$的通项公式为:

$$T_n(x)=\frac{\alpha^n+\beta^n}{2} \tag{1}$$

$$U_n(x)=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} \tag{2}$$

其中, $\alpha=x+\sqrt{x^2-1}$, $\beta=x-\sqrt{x^2-1}$。

定义 1[10]　若矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{M}_{n\times n}(C)$有如下形式:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0-a_{n-1} & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1}-a_{n-2} & a_0-a_{n-1} & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3-a_2 & a_4-a_3 & \cdots & a_0-a_{n-1} & a_1 \\ a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & a_{n-1}-a_{n-2} & a_0-a_{n-1} \end{pmatrix},$$

则称矩阵$\boldsymbol{A}$为 H-循环矩阵, 简记为$\boldsymbol{A}=Hcirc(a_0,a_1,\cdots a_{n-1})$。

定义 2[1]　矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的谱范数与 Euclidean 范数:

$$\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda_i(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})} \tag{3}$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{E}}=\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

其中: λ_i是矩阵$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}A$的特征值; $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$是矩阵$\boldsymbol{A}$的共轭转置矩阵。

谱范数与 Euclidean 范数之间的不等式关系:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{E}}\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{E}} \tag{5}$$

引理 1　当$x\neq 1$时,

$$\sum_{k=1}^{n-1}T_k(x)=\frac{T_n(x)-T_{n+1}(x)+x-1}{2-2x},$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}U_k(x)=\frac{U_n(x)-U_{n+1}(x)+2x-1}{2-2x}$$

证明：由$\{T_0(x)\}$与$\{U_0(x)\}$的通项公式可得

$$\sum_{k=1}^{n-1}T_k(x)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha^k+\beta^k}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}+\frac{\beta-\beta^{n+1}}{1-\beta}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)-(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})+(\alpha+\beta)-2\alpha\beta}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}\right)$$

由于$\alpha=x+\sqrt{x^2-1}$, $\beta=x-\sqrt{x^2-1}$, 所以$\alpha+\beta=2x$, $\alpha\beta=1$, 代入上式得

$$\sum_{k=1}^{n-1}T_k(x)=\frac{T_n(x)-T_{n+1}(x)+x-1}{2-2x}$$

同理可得$\sum_{k=1}^{n-1}U_k(x)=\frac{U_n(x)-U_{n+1}(x)+2x-1}{2-2x}$。

引理 2[8]　当$1-x^2\neq 0$时,

$$\sum_{k=0}^{n}T_k^2(x)=\frac{2-T_{2n+2}(x)+T_{2n}(x)-2x^2}{8-8x^2}+\frac{n+1}{2},$$

$$\sum_{k=0}^{n}U_k^2(x)=\frac{1}{4x^2-4}\times\frac{2x^2-2-T_{2n+4}(x)+T_{2n+2}(x)}{2-2x^2}-\frac{n+1}{2x^2-2}$$

引理 3　当$1-x^2\neq 0$时,

$$\sum_{k=1}^{n-1}kT_k^2(x)=\frac{1+(n-1)T_n^2(x)-nT_{n-1}^2(x)+(x^2-1)(n^2-n)}{4x^2-4},$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}kU_k^2(x)=\frac{1+(n-1)(U_n^2(x)-n)-nU_{n-1}^2(x)}{4x^2-4}$$

证明：由递推关系可得$\sum_{k=1}^{n-1}kT_k^2(x)=\sum_{k=1}^{n-1}k\frac{T_{k+1}^2(x)+2T_{k+1}(x)T_{k-1}(x)+T_{k-1}^2(x)}{4x^2}$,

令$\sum_{k=1}^{n-1}kT_k^2(x)=P$, 可得$\sum_{k=1}^{n-1}kT_{k+1}^2(x)=P-\sum_{k=1}^{n-1}T_k^2(x)+(n-1)T_n^2(x)$,

$$\sum_{k=1}^{n-1}kT_{k-1}^2(x)=P+\sum_{k=0}^{n-2}T_k^2(x)-(n-1)T_{n-1}^2(x),$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}kT_{k+1}(x)T_{k-1}(x)=P+(x^2-1)(n^2-n),$$

因此$4x^2P=4P-\sum_{k=1}^{n-1}T_k^2(x)+(n-1)T_n^2(x)+\sum_{k=0}^{n-2}T_k^2(x)-(n-1)T_{n-1}^2(x)+(x^2-1)(n^2-n)$,

即$P=\sum_{k=1}^{n-1}kT_k^2(x)=\frac{1+(n-1)T_n^2(x)-nT_{n-1}^2(x)+(x^2-1)(n^2-n)}{4x^2-4}$。

同理可得$\sum_{k=1}^{n-1}kU_k^2(x)=\frac{1+(n-1)(U_n^2(x)-n)-nU_{n-1}^2(x)}{4x^2-4}$。

引理 4　当$1-x^2\neq 0$时,

$$\sum_{k=0}^{n-1}T_k(x)T_{k+1}(x)=\frac{T_{2n-1}(x)-T_{2n+1}(x)}{8-8x^2}+\frac{nx}{2},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}U_k(x)U_{k+1}(x)=\frac{1}{4x^2-4}\times\frac{T_{2n+1}(x)-T_{2n+3}(x)+T_3(x)-1}{2-2x^2}-\frac{nx}{2x^2-2}$$

证明：

$$\sum_{k=0}^{n-1}T_k(x)T_{k+1}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\alpha^k+\beta^k\right)\left(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}\right)}{4}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\alpha^{2k+1}+\beta^{2k+1}+2x\right)=$$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\alpha-\alpha^{2n+1}}{1-\alpha^2}+\frac{\beta-\beta^{2n+1}}{1-\beta^2}+2nx\right]=\frac{T_{2n-1}(x)-T_{2n+1}(x)}{8-8x^2}+\frac{nx}{2},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} U_k(x)U_{k+1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}\right)\left(\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}\right)}{(\alpha-\beta)^2} = \frac{1}{4x^2-4}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\alpha^{2k+3}+\beta^{2k+3}-2x\right) =$$

$$\frac{1}{4x^2-4}\left[\frac{\alpha^3-\alpha^{2n+3}}{1-\alpha^2}+\frac{\beta^3-\beta^{2n+3}}{1-\beta^2}-2nx\right] = \frac{1}{4x^2-4}\times\frac{T_{2n+1}(x)-T_{2n+3}(x)+T_3(x)-1}{2-2x^2}-\frac{nx}{2x^2-2}$$

2　主要结论及其证明

定理 1　设$A = Hcirc(T_0(x),T_1(x),\cdots,T_{n-1}(x)) \in M_{n\times n}(C)$, 若$1-x^2 \neq 0$, 则

$$\|A\|_E = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2-2x^2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)},$$

其中$\varepsilon_1 = n(2-T_{2n}(x)+T_{2n-1}(x)-2x^2)+2(n-2)(T_{2n-1}(x)-T_{2n-3}(x))$,

$$\varepsilon_2 = 2nT_{n-1}^2(x)+2x-2-2(n-1)T_n^2(x)-2(x^2-1)(n^2-n)-2T_{2n-3}(x),$$

$$\varepsilon_3 = (4-4x^2)[n^2-x(n-1)(n-2)-4(n-1)T_{n-1}(x)]$$

证明:

$$A = \begin{pmatrix} T_0(x) & T_1(x) & \cdots & T_{n-2}(x) & T_{n-1}(x) \\ T_{n-1}(x) & T_0(x)-T_{n-1}(x) & \cdots & T_{n-3}(x) & T_{n-2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ T_2(x) & T_3(x)-T_2(x) & \cdots & T_0(x)-T_{n-1}(x) & T_1(x) \\ T_1(x) & T_2(x)-T_1(x) & \cdots & T_{n-1}(x)-T_{n-2}(x) & T_0(x)-T_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

根据矩阵谱范数定义可得

$$\|A\|_E^2 = n\sum_{k=0}^{n-1}T_k^2(x)+\sum_{k=1}^{n-1}kT_k^2(x)-2\sum_{k=1}^{n-2}kT_k(x)T_{k+1}(x)-2(n-1)T_0(x)T_{n-1}(x) =$$

$$n\sum_{k=0}^{n-1}T_k^2(x)+\sum_{k=1}^{n-1}kT_k^2(x)-2\sum_{i=1}^{n-2}\left(\sum_{k=0}^{n-2}T_k(x)T_{k+1}(x)-\sum_{k=0}^{n-i-2}T_k(x)T_{k+1}(x)\right)-2(n-1)T_{n-1}(x)$$

由引理 1—引理 3, 有

$$\|A\|_E^2 = \frac{n(2-T_{2n}(x)+T_{2n-1}(x)-2x^2)}{8-8x^2}+\frac{n^2}{2}+\frac{1+(n-1)T_n^2(x)-nT_{n-1}^2(x)+(x^2-1)(n^2-n)}{4x^2-4}-$$

$$2(n-2)\left(\frac{T_{2n-3}(x)-T_{2n-1}(x)}{8-8x^2}+\frac{x(n-1)}{2}\right)+\frac{T_1(x)-T_{2n-3}(x)}{4-4x^2}+\frac{x(n-1)(n-2)}{2}-2(n-1)T_{n-1}(x)$$

所以$\|A\|_E = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2-2x^2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)}$,

其中$\varepsilon_1 = n(2-T_{2n}(x)+T_{2n-1}(x)-2x^2)+2(n-2)(T_{2n-1}(x)-T_{2n-3}(x))$,

$$\varepsilon_2 = 2nT_{n-1}^2(x)+2x-2-2(n-1)T_n^2(x)-2(x^2-1)(n^2-n)-2T_{2n-3}(x),$$

$$\varepsilon_3 = (4-4x^2)[n^2-x(n-1)(n-2)-4(n-1)T_{n-1}(x)]$$

定理 2　设$A = Hcirc(T_0(x),T_1(x),\cdots,T_{n-1}(x)) \in M_{n\times n}(C)$, 若$1-x^2 \neq 0$, 则

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2n-2nx^2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)} \leqslant \|A\|_2 \leqslant \frac{T_n(x)-T_{n+1}(x)}{1-x}-2$$

其中$\varepsilon_1 = n(2-T_{2n}(x)+T_{2n-1}(x)-2x^2)+2(n-2)(T_{2n-1}(x)-T_{2n-3}(x))$,

$$\varepsilon_2 = 2nT_{n-1}^2(x)+2x-2-2(n-1)T_n^2(x)-2(x^2-1)(n^2-n)-2T_{2n-3}(x),$$

$$\varepsilon_3 = (4-4x^2)[n^2-x(n-1)(n-2)-4(n-1)T_{n-1}(x)]$$

证明:

由谱范数与 E 范数的关系可得: $\|A\|_2 \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_E = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2n-2nx^2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)}$,

另一方面, 设矩阵Q_1、Q_2和Q_3为:

$$\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\0&0&0&\ddots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\1&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\ddots&0&0\\0&0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}_3=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix},$$

可得$\boldsymbol{A}=\sum_{k=0}^{n-1}T_k(x)\boldsymbol{Q}_1^k-\sum_{k=1}^{n-2}T_{n-k-1}(x)\boldsymbol{Q}_2^k-T_{n-1}(x)\boldsymbol{Q}_3$,

由于$\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}_3^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_3=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$,

所以$\|\boldsymbol{Q}_1\|_2=\|\boldsymbol{Q}_2\|_2=\|\boldsymbol{Q}_3\|_2=1$,

因此

$$\|\boldsymbol{A}\|_2=\left\|\sum_{k=0}^{n-1}T_k(x)\boldsymbol{Q}_1^k-\sum_{k=1}^{n-2}T_{n-k-1}(x)\boldsymbol{Q}_2^k-T_{n-1}(x)\boldsymbol{Q}_3\right\|_2\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}T_k(x)\|\boldsymbol{Q}_1\|_2^k+\sum_{k=1}^{n-2}T_{n-k-1}(x)\|\boldsymbol{Q}_2\|_2^k+$$
$$T_{n-1}(x)\|\boldsymbol{Q}_3\|_2=2\sum_{k=1}^{n-1}T_k(x)-T_0(x)=\frac{T_n(x)-T_{n+1}(x)}{1-x}-2$$

定理 3 设$\boldsymbol{B}=Hcirc(U_0(x),U_1(x),\cdots,U_{n-1}(x))\in\boldsymbol{M}_{n\times n}(C)$, 若$1-x^2\neq0$, 则

$$\|\boldsymbol{B}\|_{\mathrm{E}}=\frac{1}{2(1-x^2)}\sqrt{\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)},$$

其中$\lambda_1=n(T_{2n+2}(x)-T_{2n}(x)+2-2x^2)+(2x^2-2)[1+(n-1)(U_n^2(x)-n)-nU_{n-1}^2(x)]$,

$$\lambda_2=2(n-2)(T_{2n-1}(x)-T_{2n+1}(x))+(n-2)(T_3(x)-1)+T_{2n-1}(x)-T_3(x),$$
$$\lambda_3=[x(n-1)(n-2)-n^2-2(n-1)U_{n-1}(x)(2x^2-2)](4x^2-4)$$

证明:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}U_0(x)&U_1(x)&\cdots&U_{n-2}(x)&U_{n-1}(x)\\U_{n-1}(x)&U_0(x)-U_{n-1}(x)&\cdots&U_{n-3}(x)&U_{n-2}(x)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\U_2(x)&U_3(x)-U_2(x)&\cdots&U_0(x)-U_{n-1}(x)&U_1(x)\\U_1(x)&U_2(x)-U_1(x)&\cdots&U_{n-1}(x)-U_{n-2}(x)&U_0(x)-U_{n-1}(x)\end{pmatrix}$$

根据矩阵谱范数定义可得

$$\|\boldsymbol{B}\|_{\mathrm{E}}^2=n\sum_{k=0}^{n-1}U_k^2(x)+\sum_{k=1}^{n-1}kU_k^2(x)-2\sum_{k=1}^{n-2}kU_k(x)U_{k+1}(x)-2(n-1)U_0(x)U_{n-1}(x)=$$
$$n\sum_{k=0}^{n-1}U_k^2(x)+\sum_{k=1}^{n-1}kU_k^2(x)-2\sum_{i=1}^{n-2}\left(\sum_{k=0}^{n-2}U_k(x)U_{k+1}(x)-\sum_{k=0}^{n-i-2}U_k(x)U_{k+1}(x)\right)-2(n-1)U_{n-1}(x)$$

由引理 1—引理 3, 有

$$\|\boldsymbol{B}\|_{\mathrm{E}}^2=\frac{n(2x^2-2-T_{2n+2}(x)+T_{2n}(x))}{(4x^2-4)(2-2x^2)}-\frac{n^2}{2x^2-2}+\frac{1+(n-1)(U_n^2(x)-n)-nU_{n-1}^2(x)}{4x^2-4}-$$
$$2(n-2)\left(\frac{T_{2n-1}(x)-T_{2n+1}(x)+T_3(x)-1}{(4x^2-4)(2-2x^2)}-\frac{(n-1)x}{2x^2-2}\right)+$$
$$\frac{T_3(x)-T_{2n-1}(x)+(n-2)(T_3(x)-1)}{(4x^2-4)(2-2x^2)}-\frac{x(n-1)(n-2)}{2x^2-2}-2(n-1)U_{n-1}(x)$$

所以$\|\boldsymbol{B}\|_{\mathrm{E}}=\dfrac{1}{2(1-x^2)}\sqrt{\dfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}$,

其中$\lambda_1 = n(T_{2n+2}(x) - T_{2n}(x) + 2 - 2x^2) + (2x^2 - 2)[1 + (n-1)(U_n^2(x) - n) - nU_{n-1}^2(x)]$,

$$\lambda_2 = 2(n-2)(T_{2n-1}(x) - T_{2n+1}(x)) + (n-2)(T_3(x) - 1) + T_{2n-1}(x) - T_3(x),$$

$$\lambda_3 = [x(n-1)(n-2) - n^2 - 2(n-1)U_{n-1}(x)(2x^2 - 2)](4x^2 - 4)$$

定理 4 设$\boldsymbol{B} = Hcirc(U_0(x), U_1(x), \cdots, U_{n-1}(x)) \in \boldsymbol{M}_{n\times n}(C)$, 若$1 - x^2 \neq 0$, 则

$$\frac{1}{2(1-x^2)}\sqrt{\frac{1}{2n}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \leqslant \|\boldsymbol{B}\|_2 \leqslant \frac{U_n(x) - U_{n+1}(x) + 3x - 2}{1 - x}$$

其中$\lambda_1 = n(T_{2n+2}(x) - T_{2n}(x) + 2 - 2x^2) + (2x^2 - 2)[1 + (n-1)(U_n^2(x) - n) - nU_{n-1}^2(x)]$,

$$\lambda_2 = 2(n-2)(T_{2n-1}(x) - T_{2n+1}(x)) + (n-2)(T_3(x) - 1) + T_{2n-1}(x) - T_3(x),$$

$$\lambda_3 = [x(n-1)(n-2) - n^2 - 2(n-1)U_{n-1}(x)(2x^2 - 2)](4x^2 - 4)$$

证明:

由谱范数与 E 范数的关系可得: $\|\boldsymbol{B}\|_2 \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{B}\|_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2(1-x^2)}\sqrt{\frac{1}{2n}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}$

另一方面, 设矩阵$\boldsymbol{Q}_1$、$\boldsymbol{Q}_2$和$\boldsymbol{Q}_3$为:

$$\boldsymbol{Q}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{Q}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

可得$\boldsymbol{B} = \sum_{k=0}^{n-1} U_k(x)\boldsymbol{Q}_1^k - \sum_{k=1}^{n-2} U_{n-k-1}(x)\boldsymbol{Q}_2^k - U_{n-1}(x)\boldsymbol{Q}_3$,

由于$\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{Q}_3^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,

所以$\|\boldsymbol{Q}_1\|_2 = \|\boldsymbol{Q}_2\|_2 = \|\boldsymbol{Q}_3\|_2 = 1$,

因此

$$\|\boldsymbol{B}\|_2 = \left\|\sum_{k=0}^{n-1} U_k(x)\boldsymbol{Q}_1^k - \sum_{k=1}^{n-2} U_{n-k-1}(x)\boldsymbol{Q}_2^k - U_{n-1}(x)\boldsymbol{Q}_3\right\|_2 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} U_k(x)\|\boldsymbol{Q}_1\|_2^k + \sum_{k=1}^{n-2} U_{n-k-1}(x)\|\boldsymbol{Q}_2\|_2^k + U_{n-1}(x)\|\boldsymbol{Q}_3\|_2 =$$

$$2\sum_{k=1}^{n-1} U_k(x) - U_0(x) = \frac{U_n(x) - U_{n+1}(x) + 3x - 2}{1 - x}$$

3 数值举例

设四阶矩阵:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & x & 2x^2 - 1 & 4x^3 - 3x \\ 4x^3 - 3x & 1 - 4x^3 + 3x & x & 2x^2 - 1 \\ 2x^2 - 1 & 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 & 1 - 4x^3 + 3x & x \\ x & 2x^2 - x - 1 & 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 & 1 - 4x^3 + 3x \end{pmatrix},$$

则矩阵$\boldsymbol{A}$可记为$\boldsymbol{A} = Hcirc(T_0(x), T_1(x), T_2(x), T_3(x)) \in \boldsymbol{M}_{4\times 4}(C)$,当$1 - x^2 \neq 0$, 根据定理 1 可计算$\boldsymbol{A}$的欧式范数:

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2 - 2x^2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)},$$

其中$\varepsilon_1 = 4(2T_7(x) - T_8(x) - T_5(x)) + 8(1 - x^2)$,

$$\varepsilon_2 = 2\left(4T_3^2(x) - 3T_4^2(x) - T_5(x)\right) + 2(1 - x)(12x + 11),$$

$$\varepsilon_3 = 8(1-x^2)(8-3x-6T_3(x))$$

根据定理 2 得到矩阵$\boldsymbol{A}$的谱范数上下界:

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2-2x^2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)} \leqslant \|\boldsymbol{A}\|_2 \leqslant \frac{T_4(x)-T_5(x)}{1-x}-2,$$

由于$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$, $T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$, 代入上式化简得到

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2-2x^2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)} \leqslant \|\boldsymbol{A}\|_2 \leqslant 16x^4+8x^3-12x^2-4x-1,$$

其中$\varepsilon_1 = 4(2T_7(x)-T_8(x)-T_5(x))+8(1-x^2)$,

$$\varepsilon_2 = 2\left(4T_3^2(x)-3T_4^2(x)-T_5(x)\right)+2(1-x)(12x+11),$$

$$\varepsilon_3 = 8(1-x^2)(8-3x-6T_3(x))$$

参 考 文 献

[1] SHEN S Q, CEN J M. On the spectral norms of r-circulant matrices with the k-Fibonacci and k-Lucas numbers[J]. Int J Contemp Math Sci, 2010, 5(12): 569 − 578.

[2] BAHSI M. On the norms of r-circulant matrices with the hyper harmonic numbers[J]. J Math Inequal, 2016, 10(2): 445 − 458.

[3] HASON G, RAMAZA T. On the spectral norm of rcirculant matrices with the Pell and Pell-Lucas numbers[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2016, 2(16): 65 − 71.

[4] UYGUN S, YASAMALI S. On the bounds for the norms of circulant matrices with the Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers[J]. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 2017, 23(1): 91 − 98.

[5] NAIM T, CAN K. On the norms of circulant and r-circulant matrices with the hyper harmonic Fibonacci numbers[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2015, 2(15): 253 − 264.

[6] ZHOU J W, JIANG Z L. The spectral norms of g-circulant matrices with classical Fibonacci and Lucas numbers entries[J]. Appl Math Comput, 2014, 233: 582 − 587.

[7] YU Y, JIANG Z L. On the norms and spreads of fermat, Mersenne and Gaussian Fibonacci RFMLR circulant matrices[J]. Wseas Transactions on Mathematics, 2016, 15(1): 34 − 43.

[8] 师白娟. 包含 Chebyshev 多项式的 r-循环矩阵的谱范数[J]. 四川师范大学学报 (自然科学版), 2018, 41(4): 478 − 482.

[9] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.

[10] 何承源, 张坤鹏, 马江明. H-循环矩阵线性系统求解及其求逆的多项式快速算法[J]. 成都工业学院学报, 2015, 18(2): 54 − 58.

[11] 贺美美. 关于调和 Fibonacci 数的一类特殊矩阵的谱范数[J]. 西北大学学报 (自然科学版), 2018, 48(3): 330 − 334.

[12] 何承源. 循环矩阵的一些性质[J]. 数学的实践与认识, 2001, 31(2): 211 − 216.

[13] 何承源. 对称反循环矩阵的充要条件[J]. 四川师范大学学报 (自然科学版), 2011, 34(3): 422 − 426.

[14] 何承源, 邱涛, 雷林. 包含 Jacobsthal 和 Jacobsthal-Lucas 数的 r-循环矩阵的谱范数[J]. 数学理论与应用, 2018, 38(3 − 4): 59 − 68.

(编校: 叶超)

(上接第 99 页)

[22] ZHAO Weihua, HUANG Runqiu, JU Ngpan, et al. Assessment model for earthquake-triggered landslides based on quantification theory I: case study of Jushui river basin in Sichuan, China[J]. Natural Hazards Journal of the International Society for the Prevention & Mitigation of Natural Hazards, 2014, 70(1): 821 − 838.

[23] 杨东, 焦金鱼, 田娜. 基于突变理论的岷县山区泥石流危险性区划研究[J]. 水土保持研究, 2008, 15(4): 5 − 9.

(编校: 叶超)