

· 基础学科 ·

基于公理化模糊集合的 TOPSIS 多属性决策方法

王 虎, 潘小东, 康 波
(西南交通大学数学学院, 四川 成都 611756)

摘 要: 针对属性值为语言值并且属性权重为实数的多属性决策问题, 本文提出了一种以公理化模糊集合为基础的 TOPSIS 多属性决策方法。首先确定多属性决策过程中语言评价集与相对应的模糊划分以及由此模糊划分所生成的公理化模糊集合, 将多属性决策过程中的语言值数学量化为公理化模糊集合处理; 定义了公理化模糊集合上的序关系, 并利用该序关系定义了正负理想方案; 利用公理化模糊集合的 Euclidean 距离, 分别计算备选方案与正、负理想方案之间的相对贴近度, 并由此得到备选方案的综合排序指数。最后, 本文通过一个实例来说明该模型的有效性和实用性。

关键词: 多属性决策; 语言值; 公理化模糊集; TOPSIS

中图分类号: O159; O225; C934 文献标志码: A 文章编号: 1673-159X(2022)01-0077-07

doi:10.12198/j.issn.1673-159X.3967

TOPSIS Multi-attribute Decision-making Method Based on Axiomatic Fuzzy Sets

WANG Hu, PAN Xiaodong, KANG Bo

(School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756 China)

Abstract: Aiming at the multi-attribute decision-making problem where the attribute value is a linguistic value and the attribute weight is a real number, this paper proposes a TOPSIS multi-attribute decision-making method based on an axiomatic fuzzy set. Firstly, determine the language evaluation set and the corresponding Fuzzy division and the axiomatic fuzzy set generated by the fuzzy division to mathematically quantify the linguistic value in the process of multi-attribute decision-making into axiomatic fuzzy set processing. Then define the order relationship on the axiomatic fuzzy set, and based on the order relationship define the positive and negative ideal schemes. The Euclidean distance of the axiomatic fuzzy set is used to calculate the relative closeness between the alternative schemes and the positive and negative ideal schemes, and the comprehensive ranking index of the alternative schemes is obtained. Finally, an example is used to illustrate the effectiveness and practicability of the model.

Keywords: multi-attribute decision-making; linguistic value; axiomatic fuzzy set; TOPSIS

收稿日期: 2021-03-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (61673320)。

第一作者: 王虎(1996—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为模糊数学、模糊决策。

ORCID: 0000-0002-8486-3465 E-mail: 252831426@qq.com

引用格式: 王虎, 潘小东, 康波. 基于公理化模糊集合的 TOPSIS 多属性决策方法[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2022, 41(1): 77-83.

WANG Hu, PAN Xiaodong, KANG Bo. TOPSIS Multi-attribute Decision-making Method Based on Axiomatic Fuzzy Sets[J]. Journal of Xihua University(Natural Science Edition), 2022, 41(1): 77-83.

1981 年, Hwang 等^[1]提出了基于理想点原理的 TOPSIS 方法, 经典的 TOPSIS 方法一般用于以确定的实数作为属性值的多属性决策方法。1965 年, Zadeh^[2]首次提出了模糊集合的概念, 将数学理论与应用的研究范围从精确性问题拓展到了模糊性问题。1970 年, Bellman 等^[3]首次基于模糊集理论建立了模糊决策的基本模型。此后, 基于模糊集合以及模糊集合的各种扩展模型的模糊决策方法被相继提出。胡辉等^[4]在 2007 年提出了基于区间直觉模糊集的 TOPSIS 多属性决策方法, 将属性值由确定的实数替换为区间直觉模糊数, 希望解决属性难以用准确值表示的 TOPSIS 多属性决策问题。2017 年, 王应明等^[5]提出了基于前景理论的犹豫模糊 TOPSIS 多属性决策方法, 考虑到实际决策过程中决策者的犹豫心理, 选用一组语言值来对属性进行描述。2018 年, 张文等^[6]提出了基于区间犹豫模糊语言集的 TOPSIS 多属性决策方法, 使用了区间犹豫模糊语言数来表示属性值, 能够更加细腻、准确地描述事物的模糊性。

在模糊多属性决策过程中, 备选方案的属性值往往需要使用定性的评价自然语言去描述。对评价自然语言的处理, 目前常用的第一种方法是用模糊数、三角模糊数、直觉模糊数等来表示语言值^[7-11]; 但存在的问题是, 模糊数或者扩展的模糊数的隶属度的确定存在较大主观性, 并且这些模糊数与决策者在决策过程中所使用的评价语言值很难建立合理的对应关系。第二种常采用的方法是把一组语言值用集合 $S = \{s_\alpha | \alpha = -t, \dots, -1, 0, 1, \dots, t\}$ 表示, 并且通过集合 S 中元素的下标来定义对应语言值之间的序关系、集结及相似度等计算的算子^[12-16]。例如, Rodríguez 等^[15-16]根据犹豫模糊集的背景, 提出了用一组语言值来作为属性值, 并且给出了犹豫模糊语言的序关系以及集结的算子, 用于多属性决策问题。语言值以离散的形式给出, 它们之间经过相对应的集结算子运算以后, 生成新的语言值可能不能与初始语言集中的语言值相对应, 引起初始信息的流失。

2018 年, Pan 等^[17-18]从模糊现象的本质和特征出发给出了模糊集合的公理化定义, 从整体或全局的观点给出关于模糊概念的新认识。公理化模

糊集合是定性评价自然语言的数学模型, 使 Zadeh 意义下的模糊集严格化、明确化、清晰化。在公理化模糊集合的框架下, 模糊集合能够与评价自然语言值之间建立良好的对应关系。

综合上述分析, 本文以公理化模糊集合作为基础讨论属性值用评价语言值表示的模糊多属性决策问题。基于评价自然语言值集建立模糊划分, 并基于模糊划分生成公理化模糊集。对不同论域下的属性值对应不同的模糊划分, 决策过程中直接使用公理化模糊集来进行决策建模计算。结合经典的理想解 TOPSIS 方法, 本文建立基于公理化模糊集合的 TOPSIS 模糊多属性决策方法。

1 公理化模糊集合的基本理论

下文中 $\bar{n}$ 表示为 $\{1, 2, \dots, n\}$

下面我们首先给出模糊划分和公理化模糊集合的定义。

定义 1^[17-18] 设 $U = [a, b] \subset \mathbf{R}$, U 上的一个模糊划分指的是具有如下形式的对象:

$$\tilde{U} = \{\mu_{A_1}(x), \dots, \mu_{A_n}(x)\}$$

其中, 函数 $\mu_{A_i}(x) : U \rightarrow [0, 1] (i = 1, \dots, n)$ 定义了元素 $x \in U$ 关于类 A_i 得隶属度, 并且满足下面的条件:

- 1) 对任意的 $x \in U$, 至少存在一个 $i \in \bar{n}$ 满足 $\mu_{A_i}(x) > 0$;
- 2) 对任意的 $i \in \bar{n}$, $\mu_{A_i}(x)$ 在 U 上连续;
- 3) 对任意的 $i \in \bar{n}$, 至少存在一个 $x_0 \in U$ 使得 $\mu_{A_i}(x_0) = 1$;
- 4) 对任意的 $i \in \bar{n}$, 如果在点 $x_0 \in U$ 处满足若 $\mu_{A_i}(x_0) = 1$, 那么, $\mu_{A_i}(x)$ 在 $[a, x_0]$ 上不减, 在 $[x_0, b]$ 上不减;
- 5) 对任意的 $x \in U$, 满足 $0 < \mu_{A_1}(x) + \dots + \mu_{A_n}(x) \leq 1$ 。

定义 2^[17-18] 设 $U = [a, b] \subset \mathbf{R}$, $\tilde{U} = \{\mu_{A_1}(x), \dots, \mu_{A_n}(x)\}, n \in \mathbf{N}^+$, 是 U 上的一个模糊划分。定义集合 $\mathcal{F}(\tilde{U})$ 如下:

- 1) 如果存在 $i \in \bar{n}$ 使得 $\mu_A(x) = \mu_{A_i}(x)$ 对所有 $x \in U$ 都成立, 那么 $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$;
- 2) 如果 $\mu_A(x) = \bar{\mu}(x) = 1$, 那么 $A = \{(x, (x)) | x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$;
- 3) 如果 $\mu_A(x) = \underline{\mu}(x) = 0$, 那么 $A = \{(x, \mu_A(x))$

$|x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$;

4) 如果 $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$ 且 $r \in \mathbf{Q}^+$, 那么 $A^r = \{(x, (\mu_A(x))^r) | x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$;

(5) 如果 $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$, 并且 N 是定义在 $[0, 1]$ 上的强否定, 那么 $A^N = \{(x, (\mu_A(x))^N) | x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$;

6) 如果 $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$, $B = \{(x, \mu_B(x)) | x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$, 并且 $\otimes$ 是一个三角模, 那么 $A \otimes B = \{(x, \mu_A(x) \otimes \mu_B(x)) | x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$;

7) 如果 $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$, $B = \{(x, \mu_B(x)) | x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$, 并且 $\oplus$ 是一个三角余模算子, 则 $A \oplus B = \{(x, \mu_A(x) \oplus \mu_B(x)) | x \in U\} \in \mathcal{F}(\tilde{U})$;

8) $\mathcal{F}(\tilde{U})$ 不再包含其他元素。

$\mathcal{F}(\tilde{U})$ 称为由 $\tilde{U}$ 生成的模糊隶属空间, $\mathcal{F}(\tilde{U})$ 中的元素称为定义在 U 上且关于模糊划分 $\tilde{U}$ 的模糊集合。

2 公理化模糊集合的序关系和距离

2.1 公理化模糊集合的序关系

在下文中, 若无特殊说明, $\tilde{U}$ 均表示论域 $U = [a, b] \subset \mathbf{R}$ 上的模糊划分, $\mathcal{F}(\tilde{U})$ 表示由 $\tilde{U}$ 生成的模糊隶属空间。

在模糊多属性决策理论中, 模糊集合的序关系扮演着非常重要的作用。如果各方案的最终打分是用模糊集合来表示的, 那么就需要用一种方法对模糊集合进行排序。

为了定义模糊集合的序关系, 下面我们首先将同一模糊隶属空间中的模糊集合转化为实数, 然后再根据所得到的实数值的自然序对模糊集合进行排序。

定义 3 设 $A \in \mathcal{F}(\tilde{U})$, 定义 A 的模糊均值 $m_v(A)$ 为

$$m_v(A) = \frac{\int_a^b x \mu_A(x) dx}{\int_a^b \mu_A(x) dx},$$

其中 $[a, b]$ 为公理化模糊集合 A 的论域。

定义 4 设 $A, B \in \mathcal{F}(\tilde{U})$, 定义 $\mathcal{F}(\tilde{U})$ 上的序关系 $\leq$ 为: $A \leq B$ 当且仅当 $m_v(A) \leq m_v(B)$ 。

例 1 用语言评价集 {好, 中, 差} 来评价某个班级学生综合测评分数的好坏, 设论域为 $[0, 100]$ 。

用模糊集合 A_1 表示评价语言“差”, 用模糊集合 A_2 表示评价语言“中”, 用模糊集合 A_3 表示评价语言“好”, 它们的隶属度函数 $\mu_{A_1}(x)$ 、 $\mu_{A_2}(x)$ 、 $\mu_{A_3}(x)$ 分别定义为:

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{50}x + 1, & x \in [0, 50] \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

$$\mu_{A_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{50}x, & x \in [0, 50] \\ -\frac{1}{50}x + 2, & x \in [50, 100] \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

$$\mu_{A_3}(x) = \begin{cases} \frac{1}{50}x - 1, & x \in [50, 100] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

身高隶属度函数如图 1 所示。

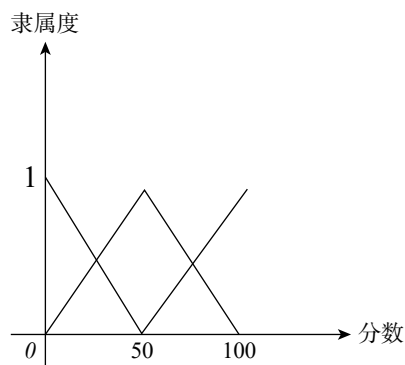


图 1 身高隶属度函数图像

易知, $\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \mu_{A_3}(x)\}$ 构成 U 上的一个模糊划分。

通过计算可以得到模糊集“差”的模糊均值 $m_v(A_1) = \frac{\int_0^{100} x \mu_{A_1}(x) dx}{\int_0^{100} \mu_{A_1}(x) dx} = 25$, 模糊集“中”的模糊均值 $m_v(A_2) = 50$, 模糊集“好”的模糊均值为 $m_v(A_3) = 75$, 于是可知, $A_3 \geq A_2 \geq A_1$ 。

2.2 公理化模糊集的距离

在经典 TOPSIS 方法中, 我们通过计算各个备选方案与正负理想方案之间的距离来度量各个方案的优劣性。经典 TOPSIS 方法的属性值在为确定的实数的情况下, 计算两个方案同一属性的差异时, 可以直接通过实数的运算来实现, 最后使用 Euclidean 距离来度量两个方案之间的距离。在本文中, 我们使用自然语言所对应的公理化模糊集来对方案的不同属性进行表示并且计算, 公理化模糊集在严格的公理定义下的隶属度函数为连续的函数。根据经典 TOPSIS 方法的启发, 我们根据扩张

原理^[19]来对模糊集定义四则运算及开方运算法则,将方案看作一个分量为属性值的向量,计算向量之间的距离为一个模糊集。本文对模糊集进行实数化再进行距离的比较。

定义 5 设 $A \in \mathcal{F}(\tilde{U})$, $U = [a, b] \subset \mathbf{R}$, $B \in \mathcal{F}(\tilde{V})$, $V = [c, d] \subset \mathbf{R}$ 。定义 A, B 之间的四则运算结果如下所示:

1) $(A - B)(z) = \bigvee_{x-y=z} (u_A(x) \wedge u_B(y))$, 模糊集 $(A - B)$ 的论域 $U_{(A-B)} = [a - d, b - c]$;

2) $(A + B)(z) = \bigvee_{x+y=z} (u_A(x) \wedge u_B(y))$, 模糊集 $(A + B)$ 的论域 $U_{(A+B)} = [a + c, b + d]$;

3) $(A \times B)(z) = \bigvee_{x \times y=z} (u_A(x) \wedge u_B(y))$, 模糊集 $(A \times B)$ 的论域 $U_{(A \times B)} = [e, f]$, $e = \min\{x \times y | x \in U_A, y \in U_B\}$, $f = \max\{x \times y | x \in U_A, y \in U_B\}$;

4) $(A/B)(z) = \bigvee_{x/y=z} (u_A(x) \wedge u_B(y))$, 模糊集 (A/B) 的论域 $U_{(A/B)} = [e, f]$, $e = \min\{x/y | x \in U_A, y \in U_B\}$, $f = \max\{x/y | x \in U_A, y \in U_B\}$ 。

定义 6 设 $A \in \mathcal{F}(\tilde{U})$, $\tilde{U} = [a, b] \subset \mathbf{R}^+$, 定义模糊集 A 的开方运算如下所示:

$\sqrt{A}(y) = \bigvee_{x=y^2} \{u_A(x)\}$, 模糊集 $\sqrt{A}$ 的论域为 $[\sqrt{a}, \sqrt{b}]$ 。

定义 7 设两个不同向量 a_i, a_k 有 m 个分量, 并且向量的分量由公理化模糊集表示, 其中 a_i 表示为 $(r_{i,1}, r_{i,2}, \dots, r_{i,m})$, a_k 表示为 $(r_{k,1}, r_{k,2}, \dots, r_{k,m})$ 。且第 j 个向量的权重为 w_j , 满足 $\sum_{j=1}^m w_j = 1$, 定义向量 a_i, a_k 的 Euclidean 距离 $d(a_i, a_j)$ 为

$$d(a_i, a_k) = m_v(A_{d(a_i, a_k)}(x) dx) / \int_U A_{d(a_i, a_k)}(x) dx,$$

其中: $A_{d(a_i, a_k)} = \sqrt{\sum_{j=1}^m w_j (z_{i,j} - z_{k,j})^2}$; $z_{i,j} = \frac{r_{i,j}}{\sqrt{\sum_{j=1}^m r_{i,j}^2}}$ 。

$z_{i,j}$ 表示经过标准化处理后的分量值, $z_{i,j}$ 的论域为 $[0, 1]$ 。 $A_{d(a_i, a_j)}$ 表示用定义 5 和定义 6 运算规则计算出的两个向量的 Euclidean 距离。

3 基于公理化模糊集合的模糊多属性决策方法

3.1 问题描述

多属性决策问题考虑从一组已知备选方案 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 中选出最佳方案, 并且属性集 $C = (c_1, c_2, \dots, c_m)$, $W = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ 是这些属性的

权重向量。在决策过程中, 用定性的语言来对属性进行评价。例如从一些备选电脑中去选购一台电脑, 我们这个时候可以把电脑价格的区间作为论域 U , 给 U 上一个模糊划分得到

$$\tilde{U} = \{u_{A_1}(x), u_{A_2}(x), u_{A_3}(x)\},$$

分别代表“便宜”, “中等”, “昂贵”这 3 个基本评价语言值所对应的模糊集合的隶属度函数, 电脑价格论域的所有模糊集都可以由上述 3 个基本模糊集生成, 则我们可以用公理化模糊集对应的自然语言来定性评价备选电脑。

我们可以用如下的矩阵来表示待解决的模糊多属性决策问题:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$c_{i,j}$ 代表第 i 个方案第 j 个属性, 其中的属性值是用语言值来表示的。在后续的计算中我们需要将自然语言转化为对应的公理化模糊集来建模计算。

3.2 决策方法

下面建立属性权重为实数, 属性值为自然语言情况下的 TOPSIS 决策模型。

第 1 步, 首先根据评价建立决策矩阵

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix}$$

其中 $r_{i,j}$ 代表第 i 个方案第 j 个属性的评价自然语言对应的公理化模糊集, 属性的权重满足 $\sum_{i=1}^m w_i = 1$, 用 $u_{r_{i,j}}(x)$ 表示 $r_{i,j}$ 的隶属度函数。矩阵中的模糊集隶属度函数由基本模糊集使用固定的连续三角模算子来得到。

第 2 步, 确定正理想方案 X^+ 和负理想方案 X^- :

$$X^+ = (x_1^+, x_2^+, \dots, x_m^+),$$

$$X^- = (x_1^-, x_2^-, \dots, x_m^-).$$

对于多属性决策问题中的指标属性, 分为两类, 一类是效益型指标, 一类是成本型指标。对于效益性指标, 它越大越好, 而对于成本性指标, 则越小越好。

我们令成本型指标属性的下标集为 N_1 , 效益型指标属性的下标为 N_2 。我们在 2.1 节中讨论过有

关于公理化模糊集的序关系。

对于效益型指标 $r_{i,j} (j \in N_2)$, 我们在取正理想解的时候, 考虑备选方案中使这个效益型指标取最大的模糊集, 对于成本性指标 $r_{i,j} (j \in N_1)$ 则正好相反, 取成本性指标的最小值,

则

$$x_j^+ = \max_{1 \leq i \leq m} r_{i,j}, j \in N_2,$$

$$x_j^+ = \min_{1 \leq i \leq m} r_{i,j}, j \in N_1。$$

类似对于负理想解有:

$$x_j^- = \min_{1 \leq i \leq m} r_{i,j}, j \in N_2,$$

$$x_j^- = \max_{1 \leq i \leq m} r_{i,j}, j \in N_1。$$

通过上述方法, 我们确定了正负理想解。

第3步, 计算各个备选方案与正负理想解之间的距离, 根据经典 TOPSIS 方法步骤, 为了消除量纲对距离的影响, 首先对原始决策矩阵的属性集进行标准化处理:

$$z_{i,j} = \frac{r_{i,j}}{\sqrt{\sum_{j=1}^m r_{i,j}^2}}$$

得到以下标准化决策矩阵

$$R = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{m1} & z_{m2} & \cdots & z_{mn} \end{bmatrix}$$

对正负理想解也进行标准化处理。将两个方案看作两个向量, 属性值的权重为分量的权重。按照第2.2节中的步骤得到第 $i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ 个方案与正理想解的实数距离为:

$$D_i^+ = d(X^+, a_i),$$

与负理想解的实数距离为

$$D_i^- = d(X^-, a_i)。$$

第4步, 计算每个方案到正理想方案的相对贴近度

$$D_i = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-}。$$

第5步, 按照 D_i 值从大到小对方案进行优劣排序。

4 算例分析

4.1 实例计算

选用文献 [20] 中实例说明上述提出方法的过

程与合理性。考虑某个风险投资公司进行项目投资的决策问题。某风险投资公司在对备选企业 $a_1 \sim a_5$ 进行选择时, 首先制定了4项评价属性 $c_1 \sim c_4$ (属性分别为风险因素、成长因素、社会政治影响因素和环境影响因素), 设这四个因素的分数得分范围为0到100分。案例中没有给出属性权重的数值, 我们暂时认为它所有的权重相同, 都为0.25。对于4个因素的论域都为 $[0, 100]$, 我们给出相同的模糊划分为{非常差, 差, 中等, 好, 非常好}, 并且给出相应的隶属度函数如图2所示。

$$u_{A_1}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{25}x + 1, x \in [0, 25] \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

$$u_{A_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x, x \in [0, 25] \\ -\frac{1}{25}x + 2, x \in [25, 50] \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

$$u_{A_3}(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x - 1, x \in [25, 50] \\ -\frac{1}{25}x + 3, x \in [50, 75] \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

$$u_{A_4}(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x - 2, x \in [50, 75] \\ -\frac{1}{25}x + 4, x \in [75, 100] \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

$$u_{A_5}(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x - 3, x \in [75, 100] \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

其中 $u_{A_1}(x)$ 、 $u_{A_2}(x)$ 、 $u_{A_3}(x)$ 、 $u_{A_4}(x)$ 、 $u_{A_5}(x)$ 分别表示自然语言{非常差, 差, 中等, 好, 非常好}。

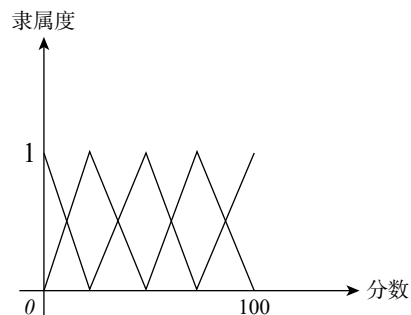


图2 分数隶属度函数图像

专家组评测得到备选企业的自然语言评价结果如表1所示。

表 1 语言评价结果

备选企业	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	中等	差	好	非常差
a_2	好	非常差	非常差	差
a_3	非常好	好	差	好
a_4	中等	非常好	非常好	非常好
a_5	差	中等	中等	非常好

步骤 1,建立决策矩阵

$$\begin{bmatrix} \text{中等} & \text{差} & \text{好} & \text{非常差} \\ \text{好} & \text{非常差} & \text{非常差} & \text{差} \\ \text{非常好} & \text{好} & \text{差} & \text{好} \\ \text{中等} & \text{非常好} & \text{非常好} & \text{非常好} \\ \text{差} & \text{中等} & \text{中等} & \text{非常好} \end{bmatrix}$$

步骤 2,确定正理想方案 X^+ 和负理想方案 X^- :

$X^+ = \{\text{非常好}, \text{非常好}, \text{非常好}, \text{非常好}\}$,

$X^- = \{\text{差}, \text{非常差}, \text{非常差}, \text{非常差}\}$ 。

步骤 3,计算各个方案到正负理想方案的距离:

$$D = \begin{bmatrix} D_1^+ & D_1^- \\ D_2^+ & D_2^- \\ D_3^+ & D_3^- \\ D_4^+ & D_4^- \\ D_5^+ & D_5^- \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1.36 & 0.83 \\ 2.18 & 0.1 \\ 0.83 & 1.32 \\ 0.5 & 1.75 \\ 1.03 & 1.22 \end{bmatrix}$$

步骤 4,计算各个方案的综合指数:

$D_1 = 0.38, D_2 = 0.044, D_3 = 0.61, D_4 = 0.78, D_5 = 0.54$ 。

根据 D_i 值的大小对备选企业进行排序,排序结果为: $a_4 > a_3 > a_5 > a_1 > a_2$,可见企业 4 为最优选择。

4.2 比较分析

文献 [20] 中选择使用三参数区间数来对属性进行分,打分结果如下所示:

$$D = \begin{bmatrix} [80, 85, 90] & [80, 85, 90] & [91, 93, 96] & [62, 65, 68] \\ [88, 90, 93] & [67, 77, 83] & [60, 67, 70] & [69, 72, 75] \\ [95, 97, 98] & [90, 93, 95] & [77, 79, 82] & [93, 95, 96] \\ [82, 85, 88] & [97, 98, 100] & [98, 99, 100] & [97, 99, 100] \\ [78, 79, 81] & [78, 79, 81] & [83, 85, 88] & [94, 97, 99] \end{bmatrix}$$

专家对备选企业的影响因素进行打分时,因为人类自身判断的模糊性,选择使用自然语言,上述将专家的评价自然语言量化为区间数来进行处理,没有解释清楚区间数如此取值的合理性,并且没有从全局的角度来约束区间数的取值,造成很大的客

观性。如同使用 Zadeh 意义下的模糊集与 Zadeh 意义扩展下的模糊集相同,隶属度的确定存在较大主观性。

基于公理化模糊集的多属性决策方法中,将专家评价自然语言量化为公理化模糊集合来处理,在确定公理化模糊集合的隶属度函数过程中,从全局的角度通过模糊划分来生成基本的公理化模糊集,并且此论域的所有模糊集只能通过这组基本公理化模糊集使用特定的方式来生成,隶属度函数满足严格的公理化定义,较传统模糊集合隶属度函数的确定更加准确。本文结果与文献 [20] 比较如表 2 所示。

表 2 结果比较

研究对象	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
文献[20]结果	0.141 6	0.108 4	0.200 0	0.300 0	0.250 0
本文结果	0.380	0.044	0.610	0.780	0.540

通过观察得知,在计算得到的结果中,文献 [20] 的结果为 $a_4 > a_5 > a_3 > a_1 > a_2$,而本文的结果为 $a_4 > a_3 > a_5 > a_1 > a_2$,其中结果 a_5 与 a_3 的结果与本文不同, a_3 优于 a_5 ,通过观察,方案的 4 个属性值的权重一致, a_3 的属性评价集为(非常好,好,差,好),而 a_5 的属性评价集为(差,中等,中等,非常好),通过直观上的对比, a_3 的属性中两个好优于 a_5 , a_3 明显优于 a_5 ,验证了本文方法的准确性。其中 5 个备选公司中计算出的结果最差为 a_2 ,通过直接观察 a_2 的评价为(好,非常差,非常差,差),较其它备选公司具有明显劣势,通过上面表格中数据对比,可以看出本文方法所计算出的结果中, a_2 的值明显小于其它 4 个备选公司的值,而文献 [20] 的结果中区分没有特别明显,本文的方法对更差的备选方案具有更好的区分性,决策结果更加符合我们想要的预期决策结果。通过比较分析,验证了本文决策模型的有效性与准确性。

5 结束语

本文在多属性决策过程中的属性集用自然语言表示的情况下,通过模糊划分来建立自然语言与公理化模糊集之间的对应关系,将各个属性直接表示为自然语言所对应的公理化模糊集来进行建模

计算,模糊集隶属度函数满足严格公理化定义并且是连续的。很好的将自然语言量化为对应的模糊集隶属度函数。在后面计算同一属性的排序,方案之间的距离时直接使用公理化模糊集来进行计算。较以往模糊多属性决策中使用单个隶属度表示属性或者直接使用自然语言没有对应的隶属度函数来表示属性更加准确,客观。本文没有考虑权重信息为模糊的情况下,在未来,可以考虑以公理化模糊集合为基础,并且权重、属性都为模糊情况下的多属性决策方法。

参 考 文 献

- [1] HWANG C L, YOON K. Multiple attribute decision making[M]. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 1981.
- [2] ZADEH L A. Fuzzy Sets[J]. *Information and Control*, 1965, 8(3): 338 – 353.
- [3] BELLMAN R E, ZADEH L A. Decision-making in a fuzzy environment[J]. *Management Science*, 1970, 12: 1 – 63.
- [4] 胡辉, 徐泽水. 基于 TOPSIS 的区间直觉模糊多属性决策法[J]. *模糊系统与数学*, 2007(5): 108 – 112.
- [5] 王应明, 阙翠平, 蓝以信. 基于前景理论的犹豫模糊 TOPSIS 多属性决策方法[J]. *控制与决策*, 2017, 32(5): 864 – 870.
- [6] 张文, 龚日朝. 基于区间犹豫模糊语言集与 TOPSIS 多属性决策方法[J]. *淮北师范大学学报(自然科学版)*, 2018, 39(4): 63 – 68.
- [7] 王毅, 雷英杰, 路艳丽. 基于直觉模糊集的多属性模糊决策方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2007, 29(12): 2060 – 2063.
- [8] 徐泽水. 对方案有偏好的三角模糊数型多属性决策方法研究[J]. *系统工程与电子技术*, 2002(8): 9 – 12, 20.
- [9] 陈晓红, 阳熹. 一种基于三角模糊数的多属性群决策方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2008(2): 278 – 282.
- [10] 万树平. 基于区间直觉梯形模糊数的多属性决策方法[J]. *控制与决策*, 2011, 26(6): 857 – 860, 866.
- [11] 张市芳. 基于斜投影技术的三角模糊多属性决策方法[J]. *数学的实践与认识*, 2018, 48(24): 232 – 237.
- [12] VERDEGAY H. A sequential selection process in group decision making with a linguistic assessment approach[J]. *Information Sciences*, 1995, 85(4): 223 – 239.
- [13] WANG R C, CHUU S J. Group decision-making using a fuzzy linguistic approach for evaluating the flexibility in a manufacturing system[J]. *Operations Research*, 2004, 44(5): 503 – 504.
- [14] 谭春桥, 贾媛. 基于证据理论和前景理论的犹豫-直觉模糊语言多准则决策方法[J]. *控制与决策*, 2017, 32(2): 333 – 339.
- [15] RODRIGUEZ R M, MARTINEZ L, HERRERA F. Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2012, 20(1): 109 – 119.
- [16] 张金波, 施明华, 周本达, 等. 基于犹豫模糊语言集结算子的多属性群决策方法[J]. *统计与决策*, 2020(16): 158 – 162.
- [17] PAN X D, XU Y. Redefinition of the concept of fuzzy set based on vague partition from the perspective of axiomatization[J]. *Soft Computing*, 2018, 22: 1777 – 1789.
- [18] PAN X D, XU Y. Correction to: Redefinition of the concept of fuzzy set based on vague partition from the perspective of axiomatization[J]. *Soft Computing*, 2018, 22(6): 2079 – 2079.
- [19] 胡宝清. 模糊理论基础 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2004.
- [20] 卫贵武. 几类模糊多属性决策方法研究 [D]. 成都: 西南交通大学, 2009.

(编校: 叶超)