·基础学科·

小伪投射模及其自同态环

许庆兵[1]，郭　栋[1]，陈华喜[2]

(1. 滁州职业技术学院基础部，安徽 滁州 239000;
2. 蚌埠学院数理系，安徽 蚌埠 233030)

摘　要: 讨论了伪投射模，小伪投射模与 hollow 模间的关系，研究了小伪投射模自同态环上的一些性质，推广了文献[8]中的相关结论。

关键词: 伪投射模; 小伪投射模; hollow 模; 自同态环

中图分类号: O153.3　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1673-159X(2013)02-0022-03

doi: 10.3969/j.issn.1673-159X.2013.02.005

Small Pseudo-projective Modules and Its Endomorphism Rings

XU Qing-bing[1], GUO Dong[1], CHEN Hua-xi[2]

(1. *Chuzhou Vocational and Technical College*, *Chuzhou* 239000 *China*;
2. *Mathematics and Physics Department of Bengbu College*, *Bengbu* 233030 *China*)

Abstract: The paper discusses the relationships among the pseudo-projective modules, small pseudo-projective modules and hollow modules. The properties of the endomorphism rings of small pseudo-projective modules are studied. Some results in reference [8] are generalized.

Key words: pseudo-projective module; small pseudo-projective module; hollow module; endomorphism ring

伪投射模是投射模概念的推广，在这一推广过程中，投射模的一些好的性质被保留下来。近年来，国内外很多学者研究了相关问题[1-7]，并得到了许多有用的结果。本文研究了小伪投射模及其自同态环的相关性质，推广了文献[8]中的一些结果，文中的环 R 均是有单位元的结合环，所有的模均为左 R-模。下面给出本文要用到的几个定义。

定义1　R-模 M 称为伪投射模，若对于任意 R-模 A，满同态 $f: M\to A$ 和 $g: M\to A$，存在同态 $h: M\to M$，使 $f=gh$。

定义2　K 是 M 的小子模，若对 M 中的任意子模 L，有 $K+L=M$ 可得 $L=M$，记作 $K<<M$。对满态射 $g: B\to A$，若 $\mathrm{Ker}g$ 是 B 的小子模，则称 g 是小的(或多余满的)。

定义3　R-模 M 称为 hollow 的，如果 M 的所有真子模均为小子模。若 M 只有唯一的小子模，则称 M 为 $S\cdot F$(semi flat)的。

定义4　R-模 M 称为小伪投射模，若对任意模 A，多余满同态 $g: M\to A$ 和满同态 $f: M\to A$，存在 $h\in \mathrm{End}M$，使得图1交换：即 $f=gh$。

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

图1　交换图1

1　关于小伪投射模

hollow 模、$S\cdot F$ 模与伪投射与小伪投射模间的关系十分密切。若 R-模 M 是 hollow 的，则由定义

收稿日期: 2012-03-29
基金项目: 安徽省高校自然科学研究项目(KJ2012Z300, KJ2011B119)
作者简介: 许庆兵(1975-)，男，讲师，硕士，主要研究方向为代数表示论。

M 既是伪投射模,又是小伪投射模。每个 $S\cdot F$ 模都是小伪投射模。事实上,若 M 是 $S\cdot F$ 模,设 f: $M\to B$ 为满同态,g: $M\to B$ 是多余满同态,因为 M 是 $S\cdot F$ 模,可得 g 是同构的,所以存在 g^{-1} 使图 2 交换。

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, dashed, "g^{-1}f"'] \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[r, "g"] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 2　交换图 2

所以 M 是小伪投射模。满同态 f: $M\to N$ 称为可裂满的,如果存在 g: $N\to M$,使得 $fg=1_N$。

定理 1　若 N 是小伪投射模,则满同态 f: $M\to N$ 是可裂的。

证明:　设 f: $M\to N$ 是满同态,则 $N\cong M/\mathrm{Ker}f$,故可令 g: $N\to M/\mathrm{Ker}f$ 为同构。当 N 为小伪投射模时,g 可提升为 f': $N\to M$,易得 $ff'=1_N$,所以 f 是可裂满的。

记 $Re(P,M)$ 为 M 在 P 中的余迹(Reject),$Re(P,M)=\cap\{\mathrm{Ker}f \mid f\in\mathrm{Hom}(P,M)\}$,相关概念可参见文献[7-8]。

定理 2　设 P 为小伪投射模,p: $P\to L$ 是多余满同态,

1) 若 $\mathrm{Ker}p\subseteq Re(P,M)$,则 L 是小伪投射模;

2) 若 $\mathrm{Ker}p << P$,且 L 是小伪投射模,则 $\mathrm{Ker}p\subseteq Re(P,M)$。

证明: 1) 对任意满同态 g: $M\to N$,f: $L\to N$,则有交换图 3。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}p \arrow[r] & P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h"'] & L \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
 & & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 3　交换图 3

假设 $\mathrm{Ker}\,p\subseteq\mathrm{Ker}h$,则 h 可通过 L 分解,即存在 h': $L\to M$,$h=h'p$,则有 $fp=gh=gh'p$。又由 p 满同态得 $f=gh'$,所以 L 是小伪投射模。

2) 对任意态射 h: $P\to M$,$K=h(\mathrm{Ker}p)$,构造下面交换图(图 4):

由 L 是小伪投射模知,存在 α: $L\to M$,且 $g\alpha=f$。令 $\tilde h=h-\alpha p$: $P\to M$,构造 $g\tilde h=0$,因而 $P=\mathrm{Ker}(p\tilde h)=\tilde h^{-1}(K)$,因为 $\tilde h(\mathrm{Ker}p)=h(\mathrm{Ker}p)$,可得 $\mathrm{Ker}p+\mathrm{Ker}\,\tilde h=P$,$\mathrm{Ker}\,\tilde h=P$,从而得 $h(\mathrm{Ker}\,p)=\tilde h(\mathrm{Ker}\,p)=0$,即有 $\mathrm{Ker}\,p\subseteq Re(P,M)$。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}p \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h"] & L \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & M \arrow[r] & M/K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 4　交换图 4

定理 3　设 M 是小伪投射模,且 $M=A\oplus B$,则 A、B 均为小伪投射模。

证明: 设 X 是 M 的一个子模,f: $A\to M/X$ 是多余满同态,定义满同态 $g=f\cdot\pi_A$: $A\oplus B\to M/X$,其中 π_A 是 M 到 A 的典范投射,则 $g(a,b)=f(a)$,$a\in A$,$b\in B$,由 M 是小伪投射模,则 g 可提升为 g^*: $A\oplus B\to M$,则 $f^*=g^*|_A$ 是 f 的提升,因而 A 是小伪投射模。同理可证 B 也为小伪投射模。

2　小伪投射模的自同态环

环 R 称为局部环,若对每个 $r\in\mathbf{R}$,均有 $r\in\mathbf{R}$ 或 $1-r\in\mathbf{R}$ 是可逆的。在文献[8]中 A. K. Tiwary 证明了若 S 是小投射 hollow 模 M 的自同态环,则 S 是局部环,这个结论对小伪投射模同样成立。

定理 4　若 S 是小伪投射 hollow 模 M 的自同态环,则 S 是局部环,且 S 中每个满同态均为同构。

证明: 设 M 是小伪投射 hollow 模,$f\in S=\mathrm{End}(M)$,若 f 为满同态,则 f 是可裂满的,$\mathrm{Ker}\,f$ 是 M 的小子模并且是 M 直和项,所以 $\mathrm{Ker}f=0$; 若 f 不是满同态,则 $Mf<<M$,且 $M=M(1_M-f)+Mf$,$M=M(1_M-f)$,因而 1_M-f 为同构,所以 S 是局部环。

若 f 是 S 中的任意一个满同态,由 M 是 hollow 模知 f 是多余满,1_M 可以提升为 g: $M\to M$,使得 $fg=1_M$,所以 g 为单态射; 另一方面,设 $m\in M$,由 f 为满同态知存在 $n\in M$,使得 $m=f(n)\Rightarrow f(n-g(m))=0\Rightarrow n-g(m)\in\mathrm{Ker}f\Rightarrow n\in\mathrm{Ker}f+g(m)\Rightarrow M\subseteq\mathrm{Ker}f+\mathrm{Im}g$,$M=\mathrm{Ker}f+\mathrm{Im}g\Rightarrow M=\mathrm{Im}g$,所以 g 为满同态,并且 $g^{-1}=f$ 为同构。

定理 5　S 是小伪投射 hollow 模 M 的自同态环,$J(S)$ 为环 S 的 jacobson 根,则有:

1) $J(S)=\{\alpha\in S \mid \mathrm{Im}\alpha$ 是 M 的小子模$\}$;

2) $S/J(S)$ 是 Von－neumann 正则环;

3) $J(S)\subseteq\mathrm{Hom}(M,J(M))$。

证明: 1) 设 $\Lambda=\{\alpha\in S \mid \mathrm{Im}\alpha$ 是 M 的小子模 ,则

对每个 $\alpha\in\Lambda\alpha\in J(S)$，因为 $(1-\alpha)M=M$，$\mathrm{Ker}(1-\alpha)$ 是 M 真子模，所以 $\Lambda\subseteq J(S)$。同样，设 $\alpha\in J(S)$，$K\subseteq M$，$\mathrm{Im}\alpha+K=M$，若 f: $M\to M/K$ 是自然满射，则 $f\alpha$: $M\to M/K$ 也是自然满射。因为对任意 $x\in M$，$f(x)\in M/K$，$x=\alpha(y)+k$，$k\in K\Rightarrow f(x)=f\alpha(y)$。又 $\mathrm{Ker}f\alpha\neq M$，若 $\mathrm{Ker}f\alpha=M$，则 $f\alpha(M)=0\Rightarrow f\alpha=0$，矛盾，所以 $\mathrm{Ker}f\alpha$ 是 M 的小子模。由 M 是小伪投射模知，存在 $\varphi\in S$，构造下面交换图（图 5）。

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "\varphi"'] & \\
M \arrow[r, "f\alpha"'] & M/K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 5 交换图 5

因而有 $f=f\alpha\varphi$，$f(1-\alpha\varphi)=0$，$(1-\alpha\varphi)M\leqslant K$，$M\leqslant K$（因为 $(1-\alpha\varphi)$ 可逆），所以 $K=M$，因而，$\mathrm{Im}\alpha<<M$。

2）设 $\alpha\in S$，使得 $\alpha\notin J(S)$，则 $\mathrm{Im}\alpha+K=M$，但对 $K\subseteq M$，$K\neq M$，则 f: $M\to M/K$ 是自然满同态，$f\alpha$: $M\to M/K$ 是多余满同态。由 1）的证明过程得 $f=f\alpha\varphi$，$f\alpha=f\alpha\varphi\alpha$，$f(\alpha-\alpha\varphi\alpha)=0$，$(\alpha-\alpha\varphi\alpha)M\subseteq K$，$\mathrm{Im}(\alpha-\alpha\varphi\alpha)$ 是 M 中的小子模，则 $\alpha-\alpha\varphi\alpha\in J(S)$，因而 $S/J(S)$ 是 Von－neumann 正则环。

3）设 $\alpha\in J(S)$，则设 $\mathrm{Im}\alpha$ 是设 M 的小子模，且 $J(M)\subseteq\mathrm{Im}\alpha\subseteq M$，由 $\mathrm{Im}\alpha\ll M$，$J(M)\subseteq M\Rightarrow J(M)+\mathrm{Im}\alpha\ll J(M)$，由文献[6] prop5.17(2) 得 $\mathrm{Im}\alpha\ll J(M)$，由 $\mathrm{Im}\alpha\subseteq J(M)\Rightarrow\alpha\in\mathrm{Hom}(M,J(M))\Rightarrow J(S)\subseteq\mathrm{Hom}(M,J(M))$。

参 考 文 献

[1] Wu L E T，Jans J P. On Quasi-projectives [J]. Illinois J Math，1967，11：439－448.

[2] Gola J S. n. Characterization of Rings Using Quasiprojective Modules II [J]. Proc. Amer Math. Soc，1971，28：337－343.

[3] KoehlerA. Quasi-projective Covers and Direct Sums [J]. Proc Amer Math. Soc，1970，24：655 － 658.

[4] Rangaswamy K，Vanja N. Quasi-projectives in Abelian and Module Categories [J]. Pacific J Math，1972，43：221－238.

[5] Theodore G. On Quasi-projective Covers [J]. Transactions of Theamerican Mathematical Society，1983，278(1)：101－113.

[6] Anderson F W，Fuller K R. Rings and Categories of Modules [M]. New York：Springer－Verlag，1992.

[7] Clark J，Lomp C. Lifting Modules [M]. Berlin：Birkhauser Verlag，2006：1－47.

[8] Tiwary A K，Chaubey K N. Small Projective Modules [J]. Indian J Pure Appl Math，1985，16(2)：113－138.

（编校：叶超）

（上接第 21 页）

参 考 文 献

[1] YanH，Xu J P. A Class of Convex Fuzzy Mappings [J]. Fuzzy Sets and Systems，2002，129：47－56.

[2] Amma E E. On Fuzzy Convexity and Parametric Fuzzy Optimization [J]. Fuzzy Sets and Systems，1992，49：135－142.

[3] 王瑞雪. 可微凸模糊映射及模糊优化问题 [D]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学，2008：15－25.

[4] 张萍，黄虎，王早. 预不变凸模糊集的一些性质 [J]. 纯粹数学与应用数学，2006，22(3)：355－359.

[5] Mohan S R，Neogy S K. On Invex Sets and Preinvex Functions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1995，189：901－908.

[6] Wu Z，Xu J. Generalized Convex Fuzzy Mappings and Fuzzy Variational-like Inequality [J]. Fuzzy Sets and Systems，2009，160：1590－1619.

（编校：叶超）