

· 基础学科 ·

# 小伪投射模及其自同态环

许庆兵<sup>1</sup>, 郭 栋<sup>1</sup>, 陈华喜<sup>2</sup>

(1. 滁州职业技术学院基础部, 安徽 滁州 239000;

2. 蚌埠学院数理系, 安徽 蚌埠 233030)

摘 要: 讨论了伪投射模、小伪投射模与 hollow 模间的关系, 研究了小伪投射模自同态环上的一些性质, 推广了文献 [8] 中的相关结论。

关键词: 伪投射模; 小伪投射模; hollow 模; 自同态环

中图分类号: O153.3 文献标志码: A 文章编号: 1673-159X(2013)02-0022-03

doi: 10.3969/j.issn.1673-159X.2013.02.005

## Small Pseudo-projective Modules and Its Endomorphism Rings

XU Qing-bing<sup>1</sup>, GUO Dong<sup>1</sup>, CHEN Hua-xi<sup>2</sup>

(1. Chuzhou Vocational and Technical College, Chuzhou 239000 China;

2. Mathematics and Physics Department of Bengbu College, Bengbu 233030 China)

**Abstract:** The paper discusses the relationships among the pseudo-projective modules, small pseudo-projective modules and hollow modules. The properties of the endomorphism rings of small pseudo-projective modules are studied. Some results in reference [8] are generalized.

**Key words:** pseudo-projective module; small pseudo-projective module; hollow module; endomorphism ring

伪投射模是投射模概念的推广, 在这一推广过程中, 投射模的一些好的性质被保留下来。近年来, 国内外很多学者研究了相关问题<sup>[1-7]</sup>, 并得到了许多有用的结果。本文研究了小伪投射模及其自同态环的相关性质, 推广了文献 [8] 中的一些结果, 文中的环  $R$  均是有单位元的结合环, 所有的模均为左  $R$ -模。下面给出本文要用到的几个定义。

定义 1  $R$ -模  $M$  称为伪投射模, 若对于任意  $R$ -模  $A$ , 满同态  $f: M \rightarrow A$  和  $g: M \rightarrow A$ , 存在同态  $h: M \rightarrow M$  使  $f = gh$ 。

定义 2  $K$  是  $M$  的小子模, 若对  $M$  中的任意子模  $L$ , 有  $K + L = M$  可得  $L = M$ , 记作  $K \ll M$ 。对满态射  $g: B \rightarrow A$ , 若  $\text{Ker} g$  是  $B$  的小子模, 则称  $g$  是小的 (或多余满的)。

定义 3  $R$ -模  $M$  称为 hollow 的, 如果  $M$  的所

有真子模均为小子模。若  $M$  只有唯一的小子模, 则称  $M$  为  $S \cdot F$  (semi flat) 的。

定义 4  $R$ -模  $M$  称为小伪投射模, 若对任意模  $A$ , 多余满同态  $g: M \rightarrow A$  和满同态  $f: M \rightarrow A$ , 存在  $h \in \text{End} M$ , 使得图 1 交换: 即  $f = gh$ 。

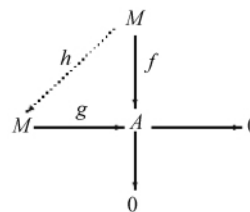


图 1 交换图 1

### 1 关于小伪投射模

hollow 模、 $S \cdot F$  模与伪投射与小伪投射模间的关系十分密切。若  $R$ -模  $M$  是 hollow 的, 则由定义

收稿日期: 2012-03-29

基金项目: 安徽省高校自然科学基金项目 (KJ2012Z300, KJ2011B119)

作者简介: 许庆兵 (1975 -), 男, 讲师, 硕士, 主要研究方向为代数表示论。

$M$  既是伪投射模, 又是小伪投射模。每个  $S \cdot F$  模都是小伪投射模。事实上, 若  $M$  是  $S \cdot F$  模, 设  $f: M \rightarrow B$  为满同态,  $g: M \rightarrow B$  是多余满同态, 因为  $M$  是  $S \cdot F$  模, 可得  $g$  是同构的, 所以存在  $g^{-1}$  使图 2 交换。

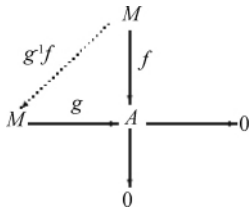


图 2 交换图 2

所以  $M$  是小伪投射模。满同态  $f: M \rightarrow N$  称为可裂满的, 如果存在  $g: N \rightarrow M$ , 使得  $fg = 1_N$ 。

定理 1 若  $N$  是小伪投射模, 则满同态  $f: M \rightarrow N$  是可裂的。

证明: 设  $f: M \rightarrow N$  是满同态, 则  $N \cong M/\text{Ker}f$ , 故可令  $g: N \rightarrow M/\text{Ker}f$  为同构。当  $N$  为小伪投射模时,  $g$  可提升为  $f': N \rightarrow M$ , 易得  $ff' = 1_N$ , 所以  $f$  是可裂满的。

记  $\text{Re}(P, M)$  为  $M$  在  $P$  中的余迹 (Reject),  $\text{Re}(P, M) = \bigcap \{ \text{Ker}f \mid f \in \text{Hom}(P, M) \}$ , 相关概念可参见文献 [7-8]。

定理 2 设  $P$  为小伪投射模,  $p: P \rightarrow L$  是多余满同态,

- 1) 若  $\text{Ker}p \subseteq \text{Re}(P, M)$ , 则  $L$  是小伪投射模;
- 2) 若  $\text{Ker}p \ll P$ , 且  $L$  是小伪投射模, 则  $\text{Ker}p \subseteq \text{Re}(P, M)$ 。

证明: 1) 对任意满同态  $g: M \rightarrow N$ ,  $f: L \rightarrow N$ , 则有交换图 3。

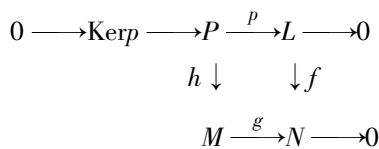


图 3 交换图 3

假设  $\text{Ker}p \subseteq \text{Re}h$ , 则  $h$  可通过  $L$  分解, 即存在  $h': L \rightarrow M$ ,  $h = h'p$ , 则有  $fp = gh = gh'p$ 。又由  $p$  满同态得  $f = gh'$ , 所以  $L$  是小伪投射模。

2) 对任意态射  $h: P \rightarrow M$ ,  $K = h(\text{Ker}p)$  构造下面交换图 (图 4):

由  $L$  是小伪投射模知, 存在  $\alpha: L \rightarrow M$ , 且  $g\alpha = f$ 。令  $\tilde{h} = h - \alpha p: P \rightarrow M$ , 构造  $\tilde{g}h := 0$ , 因而  $P = \text{Ker}(p\tilde{h}) = \tilde{h}^{-1}(K)$ , 因为  $\tilde{h}(\text{Ker}p) = h(\text{Ker}p)$ , 可得  $\text{Ker}p +$

$\text{Ker}\tilde{h} = P$ ,  $\text{Ker}\tilde{h} = P$ , 从而得  $h(\text{Ker}p) = \tilde{h}(\text{Ker}p) = 0$ , 即有  $\text{Ker}p \subseteq \text{Re}(P, M)$ 。

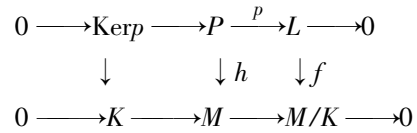


图 4 交换图 4

定理 3 设  $M$  是小伪投射模, 且  $M = A \oplus B$ , 则  $A, B$  均为小伪投射模。

证明: 设  $X$  是  $M$  的一个子模,  $f: A \rightarrow M/X$  是多余满同态, 定义满同态  $g = f \cdot \pi_A: A \rightarrow M/X$ , 其中  $\pi_A$  是  $M$  到  $A$  的典范投射, 则  $g(a + b) = f(a)$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$ , 由  $M$  是小伪投射模, 则  $g$  可提升为  $g^*: A \rightarrow M$ , 则  $f^* = g^* \downarrow_A$  是  $f$  的提升, 因而  $A$  是小伪投射模。同理可证  $B$  也为小伪投射模。

## 2 小伪投射模的自同态环

环  $R$  称为局部环, 若对每个  $r \in R$ , 均有  $r \in R$  或  $1 - r \in R$  是可逆的。在文献 [8] 中 A. K. Tiwary 证明了若  $S$  是小投射 hollow 模  $M$  的自同态环, 则  $S$  是局部环, 这个结论对小伪投射模同样成立。

定理 4 若  $S$  是小伪投射 hollow 模  $M$  的自同态环, 则  $S$  是局部环, 且  $S$  中每个满同态均为同构。

证明: 设  $M$  是小伪投射 hollow 模,  $f \in S = \text{End}(M)$ , 若  $f$  为满同态, 则  $f$  是可裂满的,  $\text{Ker}f$  是  $M$  的小子模并且是  $M$  直和项, 所以  $\text{Ker}f = 0$ ; 若  $f$  不是满同态, 则  $Mf \ll M$ , 且  $M = M(1_M - f) + Mf$ ,  $M = M(1_M - f)$ , 因而  $1_M - f$  为同构, 所以  $S$  是局部环。

若  $f$  是  $S$  中的任意一个满同态, 由  $M$  是 hollow 模知  $f$  是多余满,  $1_M$  可以提升为  $g: M \rightarrow M$ , 使得  $fg = 1_M$ , 所以  $g$  为单态射; 另一方面, 设  $m \in M$ , 由  $f$  为满同态知存在  $n \in M$ , 使得  $m = f(n) \Rightarrow f(n - g(m)) = 0 \Rightarrow n - g(m) \in \text{Ker}f \Rightarrow n \in \text{Ker}f + g(m) \Rightarrow M \subseteq \text{Ker}f + \text{Im}g$ ,  $M = \text{Ker}f + \text{Im}g \Rightarrow M = \text{Im}g$ , 所以  $g$  为满同态, 并且  $g^{-1} = f$  为同构。

定理 5  $S$  是小伪投射 hollow 模  $M$  的自同态环,  $J(S)$  为环  $S$  的 Jacobson 根, 则有:

- 1)  $J(S) = \{ \alpha \in S \mid \text{Im}\alpha \text{ 是 } M \text{ 的小子模} \}$ ;
- 2)  $S/J(S)$  是 Von - Neumann 正则环;
- 3)  $J(S) \subseteq \text{Hom}(M, J(M))$ 。

证明: 1) 设  $A = \{ \alpha \in S \mid \text{Im}\alpha \text{ 是 } M \text{ 的小子模} \}$ , 则

对每个  $\alpha \in \Lambda, \alpha \in J(S)$  ,因为  $(1 - \alpha)M = M, \text{Ker}(1 - \alpha)$  是  $M$  真子模,所以  $\Lambda \subseteq J(S)$  。同样,设  $\alpha \in J(S)$  ,  $K \subseteq M, \text{Im}\alpha + K = M$  ,若  $f: M \rightarrow M/K$  是自然满射,则  $f\alpha: M \rightarrow M/K$  也是自然满射。因为对任意  $x \in M, f(x) \in M/K, x = \alpha(y) + k, k \in K \Rightarrow f(x) = f\alpha(y)$  。又  $\text{Ker}f\alpha \neq M$  ,若  $\text{Ker}f\alpha = M$  ,则  $f\alpha(M) = 0 \Rightarrow f\alpha = 0$  ,矛盾,所以  $\text{Ker}f\alpha$  是  $M$  的小子模。由  $M$  是小伪投射模知,存在  $\varphi \in S$  构造下面交换图(图5)。

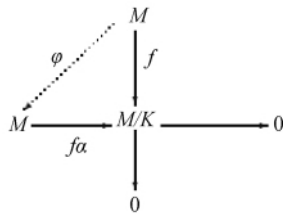


图5 交换图5

因而有  $f = f\alpha\varphi, f(1 - \alpha\varphi) = 0, (1 - \alpha\varphi)M \subseteq K, M \subseteq K$  (因为  $(1 - \alpha\varphi)$  可逆),所以  $K = M$  ,因而  $\text{Im}\alpha \ll M$ 。

2) 设  $\alpha \in S$  ,使得  $\alpha \notin J(S)$  ,则  $\text{Im}\alpha + K = M$  ,但对  $K \subseteq M, K \neq M$  ,则  $f: M \rightarrow M/K$  是自然满同态,  $f\alpha: M \rightarrow M/K$  是多余满同态。由1)的证明过程得  $f = f\alpha\varphi, f\alpha = f\alpha\varphi\alpha, f(\alpha - \alpha\varphi\alpha) = 0, (\alpha - \alpha\varphi\alpha)M \subseteq K, \text{Im}(\alpha - \alpha\varphi\alpha)$  是  $M$  中的小子模,则  $\alpha - \alpha\varphi\alpha \in J(S)$  ,因而  $S/J$

( $S$ ) 是 Von - neumann 正则环。

3) 设  $\alpha \in J(S)$  ,则设  $\text{Im}\alpha$  是  $M$  的小子模,且  $J(M) \subseteq \text{Im}\alpha \subseteq M$  ,由  $\text{Im}\alpha \ll M, J(M) \subseteq M \Rightarrow J(M) + \text{Im}\alpha \ll J(M)$  ,由文献[6]prop5.17(2)得  $\text{Im}\alpha \ll J(M)$  ,由  $\text{Im}\alpha \subseteq J(M) \Rightarrow \alpha \in \text{Hom}(M, J(M)) \Rightarrow J(S) \subseteq \text{Hom}(M, J(M))$  。

### 参 考 文 献

[1] Wu L, E T, Jans J P. On Quasi-projectives[J]. Illinois J Math, 1967, 11: 439 - 448.  
 [2] Gola J S. n. Characterization of Rings Using Quasiprojective Modules II[J]. Proc. Amer Math. Soc, 1971, 28: 337 - 343.  
 [3] Koehler A. Quasi-projective Covers and Direct Sums[J]. Proc Amer Math. Soc, 1970, 24: 655 - 658.  
 [4] Rangaswamy K, Vanja N. Quasi-projectives in Abelian and Module Categories[J]. Pacific J Math, 1972, 43: 221 - 238.  
 [5] Theodore G. On Quasi-projective Covers[J]. Transactions of The American Mathematical Society, 1983, 278(1): 101 - 113.  
 [6] Anderson F W, Fuller K R. Rings and Categories of Modules[M]. New York: Springer - Verlag, 1992.  
 [7] Clark J, Lomp C. Lifting Modules[M]. Berlin: Birkhauser Verlag, 2006: 1 - 47.  
 [8] Tiwary A K, Chaubey K N. Small Projective Modules[J]. Indian J Pure Appl Math, 1985, 16(2): 113 - 138.

(编校:叶超)

(上接第21页)

### 参 考 文 献

[1] Yan H, Xu J P. A Class of Convex Fuzzy Mappings[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 129: 47 - 56.  
 [2] Amma E E. On Fuzzy Convexity and Parametric Fuzzy Optimization[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 49: 135 - 142.  
 [3] 王瑞雪. 可微凸模糊映射及模糊优化问题[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2008: 15 - 25.  
 [4] 张萍, 黄虎, 王早. 预不变凸模糊集的一些性质[J]. 纯粹数

学与应用数学, 2006, 22(3): 355 - 359.

[5] Mohan S R, Neogy S K. On Invex Sets and Preinvex Functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, 189: 901 - 908.  
 [6] Wu Z, Xu J. Generalized Convex Fuzzy Mappings and Fuzzy Variational-like Inequality[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 160: 1590 - 1619.

(编校:叶超)