

· 基础学科 ·

小伪投射模及其自同态环

许庆兵¹, 郭 栋¹, 陈华喜²

(1. 滁州职业技术学院基础部, 安徽 滁州 239000;

2. 蚌埠学院数理系, 安徽 蚌埠 233030)

摘要: 讨论了伪投射模、小伪投射模与 hollow 模间的关系, 研究了小伪投射模自同态环上的一些性质, 推广了文献 [8] 中的相关结论。

关键词: 伪投射模; 小伪投射模; hollow 模; 自同态环

中图分类号: O153.3 文献标志码: A 文章编号: 1673-159X(2013)02-0022-03

doi: 10.3969/j.issn.1673-159X.2013.02.005

Small Pseudo-projective Modules and Its Endomorphism Rings

XU Qing-bing¹, GUO Dong¹, CHEN Hua-xi²

(1. Chuzhou Vocational and Technical College, Chuzhou 239000 China;

2. Mathematics and Physics Department of Bengbu College, Bengbu 233030 China)

Abstract: The paper discusses the relationships among the pseudo-projective modules, small pseudo-projective modules and hollow modules. The properties of the endomorphism rings of small pseudo-projective modules are studied. Some results in reference [8] are generalized.

Key words: pseudo-projective module; small pseudo-projective module; hollow module; endomorphism ring

伪投射模是投射模概念的推广, 在这一推广过程中, 投射模的一些好的性质被保留下来。近年来, 国内外很多学者研究了相关问题^[1-7], 并得到了许多有用的结果。本文研究了小伪投射模及其自同态环的相关性质, 推广了文献 [8] 中的一些结果, 文中的环 R 均是有单位元的结合环, 所有的模均为左 R -模。下面给出本文要用到的几个定义。

定义 1 R -模 M 称为伪投射模, 若对于任意 R -模 A , 满同态 $f: M \rightarrow A$ 和 $g: M \rightarrow A$, 存在同态 $h: M \rightarrow M$ 使 $f = gh$ 。

定义 2 K 是 M 的小子模, 若对 M 中的任意子模 L , 有 $K + L = M$ 可得 $L = M$, 记作 $K \ll M$ 。对满态射 $g: B \rightarrow A$, 若 $\text{Ker} g$ 是 B 的小子模, 则称 g 是小的 (或多余满的)。

定义 3 R -模 M 称为 hollow 的, 如果 M 的所

有真子模均为小子模。若 M 只有唯一的小子模, 则称 M 为 $S \cdot F$ (semi flat) 的。

定义 4 R -模 M 称为小伪投射模, 若对任意模 A , 多余满同态 $g: M \rightarrow A$ 和满同态 $f: M \rightarrow A$, 存在 $h \in \text{End} M$, 使得图 1 交换: 即 $f = gh$ 。

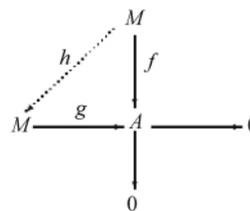


图 1 交换图 1

1 关于小伪投射模

hollow 模、 $S \cdot F$ 模与伪投射与小伪投射模间的关系十分密切。若 R -模 M 是 hollow 的, 则由定义

收稿日期: 2012-03-29

基金项目: 安徽省高校自然科学基金项目 (KJ2012Z300, KJ2011B119)

作者简介: 许庆兵 (1975 -), 男, 讲师, 硕士, 主要研究方向为代数表示论。

M 既是伪投射模, 又是小伪投射模。每个 $S \cdot F$ 模都是小伪投射模。事实上, 若 M 是 $S \cdot F$ 模, 设 $f: M \rightarrow B$ 为满同态, $g: M \rightarrow B$ 是多余满同态, 因为 M 是 $S \cdot F$ 模, 可得 g 是同构的, 所以存在 g^{-1} 使图 2 交换。

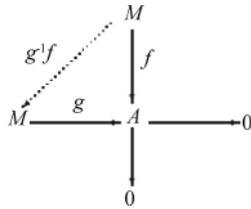


图 2 交换图 2

所以 M 是小伪投射模。满同态 $f: M \rightarrow N$ 称为可裂满的, 如果存在 $g: N \rightarrow M$, 使得 $fg = 1_N$ 。

定理 1 若 N 是小伪投射模, 则满同态 $f: M \rightarrow N$ 是可裂的。

证明: 设 $f: M \rightarrow N$ 是满同态, 则 $N \cong M/\text{Ker}f$, 故可令 $g: N \rightarrow M/\text{Ker}f$ 为同构。当 N 为小伪投射模时, g 可提升为 $f': N \rightarrow M$, 易得 $ff' = 1_N$, 所以 f 是可裂满的。

记 $\text{Re}(P, M)$ 为 M 在 P 中的余迹 (Reject), $\text{Re}(P, M) = \bigcap \{ \text{Ker}f \mid f \in \text{Hom}(P, M) \}$, 相关概念可参见文献 [7-8]。

定理 2 设 P 为小伪投射模, $p: P \rightarrow L$ 是多余满同态,

- 1) 若 $\text{Ker}p \subseteq \text{Re}(P, M)$, 则 L 是小伪投射模;
- 2) 若 $\text{Ker}p \ll P$, 且 L 是小伪投射模, 则 $\text{Ker}p \subseteq \text{Re}(P, M)$ 。

证明: 1) 对任意满同态 $g: M \rightarrow N$, $f: L \rightarrow N$, 则有交换图 3。

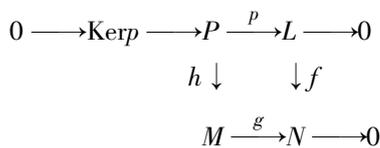


图 3 交换图 3

假设 $\text{Ker}p \subseteq \text{Re}h$, 则 h 可通过 L 分解, 即存在 $h': L \rightarrow M$, $h = h'p$, 则有 $fp = gh = gh'p$ 。又由 p 满同态得 $f = gh'$, 所以 L 是小伪投射模。

2) 对任意态射 $h: P \rightarrow M$, $K = h(\text{Ker}p)$ 构造下面交换图 (图 4):

由 L 是小伪投射模知, 存在 $\alpha: L \rightarrow M$, 且 $g\alpha = f$ 。令 $\tilde{h} = h - \alpha p: P \rightarrow M$, 构造 $\tilde{g}h := 0$, 因而 $P = \text{Ker}(p\tilde{h}) = \tilde{h}^{-1}(K)$, 因为 $\tilde{h}(\text{Ker}p) = h(\text{Ker}p)$, 可得 $\text{Ker}p +$

$\text{Ker}\tilde{h} = P$, $\text{Ker}\tilde{h} = P$, 从而得 $h(\text{Ker}p) = \tilde{h}(\text{Ker}p) = 0$, 即有 $\text{Ker}p \subseteq \text{Re}(P, M)$ 。

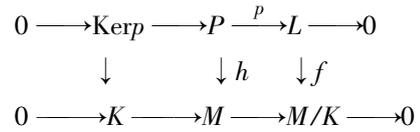


图 4 交换图 4

定理 3 设 M 是小伪投射模, 且 $M = A \oplus B$, 则 A, B 均为小伪投射模。

证明: 设 X 是 M 的一个子模, $f: A \rightarrow M/X$ 是多余满同态, 定义满同态 $g = f \cdot \pi_A: A \rightarrow M/X$, 其中 π_A 是 M 到 A 的典范投射, 则 $g(a + b) = f(a)$, $a \in A$, $b \in B$, 由 M 是小伪投射模, 则 g 可提升为 $g^*: A \rightarrow M$, 则 $f^* = g^* \downarrow_A$ 是 f 的提升, 因而 A 是小伪投射模。同理可证 B 也为小伪投射模。

2 小伪投射模的自同态环

环 R 称为局部环, 若对每个 $r \in R$, 均有 $r \in R$ 或 $1 - r \in R$ 是可逆的。在文献 [8] 中 A. K. Tiwary 证明了若 S 是小投射 hollow 模 M 的自同态环, 则 S 是局部环, 这个结论对小伪投射模同样成立。

定理 4 若 S 是小伪投射 hollow 模 M 的自同态环, 则 S 是局部环, 且 S 中每个满同态均为同构。

证明: 设 M 是小伪投射 hollow 模, $f \in S = \text{End}(M)$, 若 f 为满同态, 则 f 是可裂满的, $\text{Ker}f$ 是 M 的小子模并且是 M 直和项, 所以 $\text{Ker}f = 0$; 若 f 不是满同态, 则 $Mf \ll M$, 且 $M = M(1_M - f) + Mf$, $M = M(1_M - f)$, 因而 $1_M - f$ 为同构, 所以 S 是局部环。

若 f 是 S 中的任意一个满同态, 由 M 是 hollow 模知 f 是多余满, 1_M 可以提升为 $g: M \rightarrow M$, 使得 $fg = 1_M$, 所以 g 为单态射; 另一方面, 设 $m \in M$, 由 f 为满同态知存在 $n \in M$, 使得 $m = f(n) \Rightarrow f(n - g(m)) = 0 \Rightarrow n - g(m) \in \text{Ker}f \Rightarrow n \in \text{Ker}f + g(m) \Rightarrow M \subseteq \text{Ker}f + \text{Im}g$, $M = \text{Ker}f + \text{Im}g \Rightarrow M = \text{Im}g$, 所以 g 为满同态, 并且 $g^{-1} = f$ 为同构。

定理 5 S 是小伪投射 hollow 模 M 的自同态环, $J(S)$ 为环 S 的 Jacobson 根, 则有:

- 1) $J(S) = \{ \alpha \in S \mid \text{Im}\alpha \text{ 是 } M \text{ 的小子模} \}$;
- 2) $S/J(S)$ 是 Von - Neumann 正则环;
- 3) $J(S) \subseteq \text{Hom}(M, J(M))$ 。

证明: 1) 设 $A = \{ \alpha \in S \mid \text{Im}\alpha \text{ 是 } M \text{ 的小子模} \}$, 则

对每个 $\alpha \in \Lambda, \alpha \in J(S)$, 因为 $(1 - \alpha)M = M, \text{Ker}(1 - \alpha)$ 是 M 真子模, 所以 $\Lambda \subseteq J(S)$ 。 同样, 设 $\alpha \in J(S)$, $K \subseteq M, \text{Im}\alpha + K = M$, 若 $f: M \rightarrow M/K$ 是自然满射, 则 $f\alpha: M \rightarrow M/K$ 也是自然满射。 因为对任意 $x \in M, f(x) \in M/K, x = \alpha(y) + k, k \in K \Rightarrow f(x) = f\alpha(y)$ 。 又 $\text{Ker}f\alpha \neq M$, 若 $\text{Ker}f\alpha = M$, 则 $f\alpha(M) = 0 \Rightarrow f\alpha = 0$, 矛盾, 所以 $\text{Ker}f\alpha$ 是 M 的小子模。 由 M 是小伪投射模知, 存在 $\varphi \in S$ 构造下面交换图(图5)。

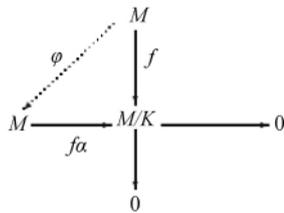


图5 交换图5

因而有 $f = f\alpha\varphi, f(1 - \alpha\varphi) = 0, (1 - \alpha\varphi)M \subseteq K, M \subseteq K$ (因为 $(1 - \alpha\varphi)$ 可逆), 所以 $K = M$, 因而 $\text{Im}\alpha \ll M$ 。

2) 设 $\alpha \in S$, 使得 $\alpha \notin J(S)$, 则 $\text{Im}\alpha + K = M$, 但对 $K \subseteq M, K \neq M$, 则 $f: M \rightarrow M/K$ 是自然满同态, $f\alpha: M \rightarrow M/K$ 是多余满同态。 由1)的证明过程得 $f = f\alpha\varphi, f\alpha = f\alpha\varphi\alpha, f(\alpha - \alpha\varphi\alpha) = 0, (\alpha - \alpha\varphi\alpha)M \subseteq K, \text{Im}(\alpha - \alpha\varphi\alpha)$ 是 M 中的小子模, 则 $\alpha - \alpha\varphi\alpha \in J(S)$, 因而 S/J

(S) 是 Von - neumann 正则环。

3) 设 $\alpha \in J(S)$, 则设 $\text{Im}\alpha$ 是 M 的小子模, 且 $J(M) \subseteq \text{Im}\alpha \subseteq M$, 由 $\text{Im}\alpha \ll M, J(M) \subseteq M \Rightarrow J(M) + \text{Im}\alpha \ll J(M)$, 由文献[6]prop5.17(2)得 $\text{Im}\alpha \ll J(M)$, 由 $\text{Im}\alpha \subseteq J(M) \Rightarrow \alpha \in \text{Hom}(M, J(M)) \Rightarrow J(S) \subseteq \text{Hom}(M, J(M))$ 。

参 考 文 献

[1] Wu L, E T, Jans J P. On Quasi-projectives[J]. Illinois J Math, 1967, 11: 439 - 448.
 [2] Gola J S. n. Characterization of Rings Using Quasiprojective Modules II[J]. Proc. Amer Math. Soc, 1971, 28: 337 - 343.
 [3] Koehler A. Quasi-projective Covers and Direct Sums[J]. Proc Amer Math. Soc, 1970, 24: 655 - 658.
 [4] Rangaswamy K, Vanja N. Quasi-projectives in Abelian and Module Categories[J]. Pacific J Math, 1972, 43: 221 - 238.
 [5] Theodore G. On Quasi-projective Covers[J]. Transactions of The American Mathematical Society, 1983, 278(1): 101 - 113.
 [6] Anderson F W, Fuller K R. Rings and Categories of Modules[M]. New York: Springer - Verlag, 1992.
 [7] Clark J, Lomp C. Lifting Modules[M]. Berlin: Birkhauser Verlag, 2006: 1 - 47.
 [8] Tiwary A K, Chaubey K N. Small Projective Modules[J]. Indian J Pure Appl Math, 1985, 16(2): 113 - 138.

(编校: 叶超)

(上接第21页)

参 考 文 献

[1] Yan H, Xu J P. A Class of Convex Fuzzy Mappings[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 129: 47 - 56.
 [2] Amma E E. On Fuzzy Convexity and Parametric Fuzzy Optimization[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 49: 135 - 142.
 [3] 王瑞雪. 可微凸模糊映射及模糊优化问题[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2008: 15 - 25.
 [4] 张萍, 黄虎, 王早. 预不变凸模糊集的一些性质[J]. 纯粹数

学与应用数学, 2006, 22(3): 355 - 359.

[5] Mohan S R, Neogy S K. On Invex Sets and Preinvex Functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, 189: 901 - 908.
 [6] Wu Z, Xu J. Generalized Convex Fuzzy Mappings and Fuzzy Variational-like Inequality[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 160: 1590 - 1619.

(编校: 叶超)