·基础学科·

一类带吸引项的抛物型方程在记忆边界条件下解的性质

庞凤琴，王玉兰*，李慧芳

(西华大学理学院，四川 成都　610039)

摘　要：研究带非线性吸引项的抛物型方程 $u_t=\Delta u-u^m$ 在具有时间积分的 Neumann 边界条件 $\frac{\partial u}{\partial v}=u^q\int_0^t u^p$ 下解的性质，其中 $p>0,q>0,m\geqslant 1$。文章首先证明比较原理成立；其次采用不动点定理建立解的局部存在性；最后通过上下解技巧、积分估计等方法得到方程存在爆破解的充分条件。

关键词：抛物型方程；记忆边界；整体存在；爆破

中图分类号：O175.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－159X(2016)02－0082－6

doi：10.3969/j.issn.1673－159X.2016.02.016

The Properties of a Parabolic Equation with Absorb Term and Memory Boundary Condition

PANG Fengqin, WANG Yulan*, LI Huifang

(*School of Science, Xihua University, Chengdu* 610039 *China*)

Abstract: In this paper, we studied the following parabolic equation with absorb term $u_t=\Delta u-u^m(x,t), x\in\Omega, t>0$ under the Neumann boundary condition $\frac{\partial u}{\partial v}=u^q\int_0^t u^p$, where $p>0$, $q>0$, $m\geqslant 1$. We proved a comparison principle, and then established the local existence of solutions via a fixed point argument. Finally we obtained the sufficient condition for the existence of blowup solutions by using the super－sub solution technique and integral methods.

Keywords: parabolic equation; memory boundary; global existence; blowup

1　引言与准备工作

在过去几十年中，抛物型方程的研究取得了丰硕的成果。其中，解的整体存在性和爆破奇性是该研究领域的热点之一[1-10]。近年来，很多学者开始关注带有时间积分边界条件(也称记忆边界条件)的抛物型方程解的性质。特别地，J. R. Anderson 等[11] 2011 年研究了抛物型方程 $u_t=\Delta u$ 在边界条件 $\frac{\partial u}{\partial \nu}=u^q\int_0^t u^p(x,s)\mathrm{d}s$ 下解的爆破性质。作者证明了当 $p+q\leqslant 1$ 时，所有解整体存在；而当 $p+q>1$ 时，任意非负解在有限时刻爆破，并且当 $p>1,q=0$ 或 $p\geqslant 0,q>1$ 时爆破集为区域边界的一个子集。2012 年，K. Deng 等进一步研究了抛物型方程 $u_t=\Delta u$ 带有时间积分边界条件 $\frac{\partial u}{\partial \nu}=\int_0^t f(u(x,s))\mathrm{d}s$ 的边值问题[12]。作者利用带齐次诺依曼边界条件的热方程的格林函数表示出了抛物型方程的解，然后利用反证法证明了所有非负解在

收稿日期：2015－05－05

基金项目：四川省教育厅重点科研项目(14ZA0119)；西华大学研究生创新基金(ycjj2014034)。

＊**通信作者**：王玉兰(1979—)，女，副教授，博士，主要研究方向偏微分方程。E－mail：wangyulan－math@163.com.

有限时刻爆破。2014 年，陈继芹等[13]推广了前人的工作，研究了形式为 $\begin{cases} u_t = \Delta u + u^p \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = \displaystyle\int_0^t u^q(x,s)\mathrm{d}s \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$ 的抛物方程的解的整体存在及爆破问题。同年 J. R. Anderson 等研究了多孔介质方程 $u_t = \Delta u^m$ 在带时间积分的边界条件 $\dfrac{\partial u^m}{\partial \nu} = u^q \displaystyle\int_0^t u^p(x,s)\mathrm{d}s$ 下的模型[14]，得到了解整体存在和有限时刻爆破的完整分类。值得注意的是，关于这类具有记忆边界的模型的研究中，到目前为止还没有方程中具有吸引项的研究结果，故本文将研究一类带有吸引项的方程耦合记忆边界条件的模型：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - u^m(x,t), x \in \Omega, \quad t > 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = u^q \displaystyle\int_0^t u^p(x,s) ds, x \in \partial\Omega, \quad t > 0; \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \overline{\Omega}。 \end{cases} \tag{1}$$

其中：$p>0, q>0, m\geqslant 1$；Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中的一个具有光滑边界的有界区域；n 是区域边界上的外法向量；$u_0(x)\geqslant 0$ 并满足相容性条件

$$\frac{\partial u_0}{\partial n} = 0 , x \in \partial\Omega 。 \tag{2}$$

如前所述，当方程(1)不存在吸引项时，方程的解在 $p+q \leqslant 1$ 时整体存在[11]，本文将证明这个结论对于方程(1)同样也成立。而吸引项的出现会给模型(1)解的爆破结果的研究带来本质的困难，本文将用上下解方法、以 p、q、m 的关系式给出方程的解发生爆破的充分条件。

上、下解技巧将在本文后面的证明中起到重要作用，为此，先介绍问题(1)上、下解的定义。

定义 1　函数 $\bar{u}(x,t) \in C^{2,1}(\Omega\times(0,T))\cap C(\overline{\Omega}\times[0,T])$ 称为问题(1)的上解，当且仅当 $\bar{u}(x,t)$ 满足：

$$\begin{cases} \bar{u}_t \geqslant \Delta\bar{u} - \bar{u}^m(x,t), x \in \Omega, \quad t > 0; \\ \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial n} \geqslant \bar{u}^q \displaystyle\int_0^t \bar{u}^p(x,s)\mathrm{d}s, x \in \partial\Omega, \quad t > 0; \\ \bar{u}(x,0) \geqslant u_0(x), x \in \overline{\Omega}。 \end{cases} \tag{3}$$

下解 $\underline{u}$ 的定义可类似给出（只需要将(3)中所有不等号反向）。

下面证明比较原理。

引理 1　若 $p \geqslant 1$，$q \geqslant 1$，并且 $\bar{u}(x,t)$ 和 $\underline{u}(x,t)$ 分别是(1)的上、下解，则 $\bar{u}(x,t) \geqslant \underline{u}(x,t)$ $((x,t) \in \overline{\Omega}\times[0,T])$。

证明　若存在有界连续函数 $a(x,t), b(x,t), c(x,t), d(x,t)$ $(d(x,t) \geqslant 0)$ 使得 $w(x,t) \in C^{2,1}(\Omega\times(0,T))\cap C(\overline{\Omega}\times[0,T])$ 满足：

$$\begin{cases} w_t \geqslant \Delta w + aw, x \in \Omega, t > 0; \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} \geqslant bw + c\displaystyle\int_0^t dw(x,s)\mathrm{d}s, x \in \partial\Omega, t > 0; \\ w(x,0) \geqslant 0, x \in \overline{\Omega}。 \end{cases} \tag{4}$$

则对任意 $x \in \overline{\Omega}$，$t \in (0, +\infty)$ 有 $w(x,t) \geqslant 0$。

事实上，假设光滑函数 $\xi(x) > 0$ 并且满足 $\dfrac{\partial\xi}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} \geqslant \alpha\xi$，$\alpha > 0$ 是待定常数。令 $w(x,t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\xi(x)W(x,t)$，其中 $\lambda > 0$ 是待定常数。

对任意的 $x \in \overline{\Omega}$，若取 $\alpha > \|b\|_\infty + T\|c\|_\infty\|d\|_\infty$，$\lambda > \left\|\dfrac{\Delta\xi}{\xi}\right\|_\infty + \|a\|_\infty$，则有

$$W_t \geqslant \Delta W + \frac{2\nabla\xi}{\xi}\cdot\nabla W + \left(\frac{\Delta\xi}{\xi} + a - \lambda\right)W, x \in \Omega, t > 0,$$

因此, W 不可能在 $\Omega\times(0,T]$ 内部取到负的最小值。

同样地,若存在 $x_0\in\partial\Omega$,使得 $W(x_0,t_0)=\min W<0$,则在点 (x_0,t_0) 处就有

$$\frac{\partial W}{\partial n}\Big|_{(x_0,t_0)}\geqslant -W(x_0,t_0)\left(\frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial n}-b-ce^{-\lambda t}\int_0^t de^{\lambda s}ds\right)>0,$$

矛盾,所以 W 不可能在边界上取到负的最小值;因此,在 $\bar\Omega\times[0,T]$ 上, $W\geqslant 0$,即 $w\geqslant 0$。

对于(1)的上、下解 $\bar u$ 和 $\underline{u}$,若记 $w\equiv\bar u-\underline{u}$,则:

$$w_t=\bar u_t-\underline{u}_t\geqslant\Delta\bar u-\bar u^m-(\Delta\underline{u}-\underline{u}^m)=\Delta w-a(\bar u-\underline{u})=\Delta w-aw。$$

其中:

$$\bar u^m(x,t)-\underline{u}^m(x,t)\equiv a(x,t)[\bar u(x,t)-\underline{u}(x,t)],$$

$$\frac{\partial w}{\partial n}=\frac{\partial\bar u}{\partial n}-\frac{\partial\underline{u}}{\partial n}\geqslant\bar u^q\int_0^t\bar u^p-\underline{u}^q\int_0^t\underline{u}^p=$$

$$(\bar u^q-\underline{u}^q)\int_0^t\bar u^p+\underline{u}^q\left(\int_0^t\bar u^p-\int_0^t\underline{u}^p\right)=bw+c\int_0^t dw(x,s)ds,$$

其中:

$$[\bar u^q(x,t)-\underline{u}^q(x,t)]\int_0^t\bar u^p\equiv b(x,t)[\bar u(x,t)-\underline{u}(x,t)],\ c(x,t)\equiv\underline{u}^q(x,t),$$

$$\bar u^p(x,t)-\underline{u}^p(x,t)\equiv d(x,t)[\bar u(x,t)-\underline{u}(x,t)]。$$

又由于 $\bar u(x,0)\geqslant\underline{u}(x,0)$,可得 w 满足(4)式,其中当 $p\geqslant 1$, $q\geqslant 1$ 时 $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $d(x,t)$ 均为介于 $\bar u$ 和 $\underline{u}$ 之间的有界函数,所以 $\bar u\geqslant\underline{u}$。

注:从以上证明可以看出,当 $p<1$ 或 $q<1$ 时,如果存在正常数 δ 使得 $\bar u\geqslant\delta>0$, $\underline{u}\geqslant 0$,函数 $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $d(x,t)$ 仍是有界的,因而 $\bar u\geqslant\underline{u}$ 的结论仍然成立。

下面我们将利用解的表达式和 Banach 不动点定理建立问题(1)经典解的局部存在性。用 $G(x,y,t,\tau)$ 表示带有齐次 Neumann 边界条件的热方程的 Green 函数。构造算子

$$\Gamma[u](x,t)\equiv\int_\Omega G(x,y,t,0)u_0(y)dy+$$

$$\int_0^t\int_{\partial\Omega}G(x,y,t,\tau)u^q(y,s)\int_0^\tau u^p(y,s)dsdS_yd\tau-\int_0^t\int_\Omega G(x,y,t,\tau)u^m(y,\tau)dyd\tau。\tag{5}$$

下面说明对较小的 t 算子 $\Gamma[u]$ 具有唯一不动点。为此,定义 $M_0=\sup\limits_{\bar\Omega}|u_0|$。

与文献[15]类似,令

$$\kappa(t)\equiv\sup_{x\in\bar\Omega,0\leqslant\tau\leqslant t}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}G(x,y,\tau,\eta)dS_yd\eta,$$

$$\varpi(t)\equiv\sup_{x\in\bar\Omega,0\leqslant\tau\leqslant t}\int_0^\tau\int_\Omega G(x,y,\tau,\eta)dyd\eta。$$

取定 $\hat T<\varepsilon_0$ 且 $M>M_0$,使得

$$\max\{M^{q+p}\hat Tk(\hat T),M^m\varpi(\hat T)\}\leqslant\frac{1}{2}(M-M_0)。$$

对任意的 $\varepsilon_0,\tilde C_0,\tilde C>0$,取 $t<\varepsilon_0$,有 $\kappa(t)\leqslant 2\tilde C_0\sqrt{t}$(见文献[16])有 $\varpi(t)\leqslant\tilde Ct$。

若 $|u|\leqslant M,0\leqslant t\leqslant\hat T$,则

$$|\Gamma[u]|\leqslant\left|\int_\Omega G(x,y,t,0)u_0(y)dy+\int_0^t\int_{\partial\Omega}G(x,y,t,\tau)u^q(y,s)\int_0^\tau u^p(y,s)dsdS_yd\tau\right|+$$

$$\left|\int_0^t\int_\Omega G(x,y,t,\tau)u^m(y,\tau)dyd\tau\right|\leqslant$$

$$M_0\int_\Omega G(x,y,t,0)dy+M^{q+p}\hat Tk(\hat T)+M^m\varpi(\hat T)\leqslant$$

$$M_0+\frac{1}{2}(M-M_0)+\frac{1}{2}(M-M_0)。$$

因此,Γ 是 χ 到自身的一个映射,即 $\Gamma:\chi\to\chi$,其中

$$\chi \equiv \{u \in C(\overline{\Omega} \times [0,\hat{T}]): \| u \|_{\infty} \leqslant M\}。$$

对任意的 $u_1,u_2 \in x$,有

$$\| \Gamma u_1 - \Gamma u_2 \|_{\infty} = \| \int_0^t\int_{\partial\Omega}G(x,y,t,\tau)u_1^{\,q}(y,\tau)\int_0^\tau u_1^{\,p}(y,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau -$$

$$\int_0^t\int_{\partial\Omega}G(x,y,t,\tau)u_2^{\,q}(y,\tau)\int_0^\tau u_2^{\,p}(y,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau - \int_0^t\int_\Omega G(x,y,t,\tau)u_1^{\,m}(y,\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau +$$

$$\int_0^t\int_\Omega G(x,y,t,\tau)u_2^{\,m}(y,\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau \|_{\infty} = \| \int_0^t\int_{\partial\Omega}G(x,y,t,\tau)u_1^{\,q}(y,\tau)\int_0^\tau p\xi_1 p^{-1}[u_1(y,s) -$$

$$u_2(y,s)]\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau + \int_0^t\int_{\partial\Omega}G(x,y,t,\tau)q\xi_2^{\,q-1}[u_1(y,\tau) - u_2(y,\tau)]\int_0^\tau u_2^{\,p}(y,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}S_y\mathrm{d}\tau -$$

$$\int_0^t\int_\Omega G(x,y,t,\tau)m\xi_3^{\,m-1}[u_1(y,\tau) - u_2(y,\tau)]\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau \|_{\infty} \leqslant$$

$$\| 2\tilde{C}_0(p+q)M^{p+q-1}\sqrt{t}\int_0^t[u_1(y,s)-u_2(y,s)]\mathrm{d}s \|_{\infty} + \| \int_0^t\int_\Omega G(x,y,t,\tau)mM^{m-1}[u_1(y,\tau) - u_2(y,\tau)]\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau \|_{\infty} \leqslant$$

$$(2\tilde{C}_0(p+q)M^{p+q-1}\hat{T} + \tilde{C}mM^{m-1}\hat{T}) \| u_1 - u_2 \|_{\infty},$$

其中 ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 是介于 u_1,u_2 之间的函数。

对于充分小的 $\hat{T}$,可使 $0 < 2\tilde{C}_0(p+q)M^{p+q-1}\hat{T} + \tilde{C}mM^{m-1}\hat{T} < 1$,即存在 $0 < \alpha < 1$,使得 $\| \Gamma u_1 - \Gamma u_2 \|_{\infty} \leqslant \alpha \| u_1 - u_2 \|_{\infty}$,所以 Γ 是一个压缩映射。由 Banach 不动点定理知,Γ 有一个不动点,由标准的计算可知,这个不动点是(1)的一个古典解。

2　有限时刻爆破

定理 1　当 $p+q \geqslant m$ 时,问题(1)存在有限时刻爆破的解。

证明　为了得到(1)的解在有限时刻爆破的充分条件,考虑如下初边值问题:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - u^m(x,t), x \in \Omega, \quad t > 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = u^q\displaystyle\int_0^t u^p(x,s)\mathrm{d}s, x \in \partial\Omega, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \min_{\overline{\Omega}} u_0, x \in \overline{\Omega}。\end{cases} \tag{6}$$

首先证明问题(6)的解 u 对变量 t 是单调递增的。令 $v(x,t) = u(x,t+k)(k > 0)$,则 v 满足

$$\begin{cases} v_t = \Delta v - v^m(x,t), x \in \Omega, \quad t > 0; \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} \geqslant v^q\displaystyle\int_0^t u^p(x,s)\mathrm{d}s, x \in \partial\Omega, \quad t > 0; \\ v(x,0) = u(x,k), x \in \overline{\Omega}。\end{cases} \tag{7}$$

因为 $u(x,k) \geqslant \min_{\overline{\Omega}} u_0$,所以 $v(x,t) \geqslant u(x,t)$,即 u 是单调递增的。

根据 u 的单调递增性质,我们可以考虑如下问题:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - u^m(x,t), x \in \Omega, \quad t > 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \displaystyle\int_0^t u^{p+q}(x,s)\mathrm{d}s, x \in \partial\Omega, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \min_{\overline{\Omega}} u_0, x \in \overline{\Omega}。\end{cases} \tag{8}$$

因为(8)是(6)的一个下解,我们只需证明(8)存在有限时刻爆破的解。

选择 $h(x)$ 满足如下的方程:

$$\Delta h = 1, \quad \text{on } \Omega;$$

$$\nabla h \cdot n = \frac{|\Omega|}{|\partial\Omega|}, \text{on } \partial\Omega。 \tag{9}$$

显然,对于任意的正常数 C, $h(x) + C$ 也是(9)的解,所以不妨假设在 $\overline{\Omega}$ 上 $h(x) > 0$ 。

由文献[14]知:存在 $\varphi(\zeta)$ 满足

$$\begin{cases}\varphi(\zeta) \equiv \sigma, 0 \leqslant \zeta \leqslant 1; \\ \varphi'(\zeta) = \int_1^{\zeta} \varphi^{p+q}(\eta)\mathrm{d}\eta, \zeta > 1。\end{cases} \tag{10}$$

其中 $\sigma = \min_{\overline{\Omega}} u_0 > 0$ 。

通过计算,可以得到

$$\begin{cases}\varphi'(\zeta) \equiv 0, 0 \leqslant \zeta < 1, \\ \varphi''(\zeta) = \varphi^{p+q}(\zeta), \zeta > 1。\end{cases} \tag{11}$$

对(11)第 2 个等式两端同时乘以 $\varphi'(\zeta)$ 并在 $(1,\zeta)$ 上积分得到

$$\int_1^{\zeta} \varphi''(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_1^{\zeta} \varphi^{p+q}(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x,$$

即,当 $\zeta > 1$ 时, $\varphi'(\zeta) = \left[\frac{2}{p+q+1}(\varphi^{p+q+1}(\zeta) - \sigma^{p+q+1})\right]^{\frac{1}{2}}$ 。

因为 $p + q > 1$, 所以当 $\zeta \to \infty$时, $\varphi(\zeta) \to \infty$。

设 $w(x,t) = \varphi(\varepsilon t + \gamma h(x) + C_0)$,其中 $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \gamma$, $\gamma|\nabla h(x)| = 1$, C_0 是满足 $\varepsilon t + \gamma h(x) + C_0 > 1$ 的常数。下面证明当 $p + q \geqslant m$ 且 $u_0(x)$ 充分大时, $w(x,t)$ 是(8)的一个下解。

$$\begin{gathered} w_t + w^m \leqslant \varepsilon\varphi'(\varepsilon t + \gamma h(x) + C_0) + w^{p+q}(\varepsilon t + \gamma h(x) + C_0) \leqslant \\ \gamma\varphi'(\varepsilon t + \gamma h + C_0) + \varphi''(\varepsilon t + \gamma h + C_0) = \\ \gamma\varphi'(\varepsilon t + \gamma h + C_0)\Delta h + \gamma^2\varphi''(\varepsilon t + \gamma h + C_0)|\nabla h|^2 = \Delta w, \\ \nabla w \cdot n = \gamma\varphi'(\varepsilon t + \gamma h + C_0)\nabla h \cdot n = \int_1^{\varepsilon t + \gamma h(x) + C0} \varphi^{p+q}(\eta)\mathrm{d}\eta \leqslant \\ \int_0^t \varphi^{p+q}(\varepsilon s + \gamma h(x) + C_0)\mathrm{d}s = \int_0^t w^{p+q}(x,s)\mathrm{d}s。\end{gathered}$$

最后,选取 $u(x,0)$ 充分大使得 $u(x,0) \geqslant \varphi(\gamma(h(x)) + C_0)$,则 $w(x,t)$ 是(8)的一个下解,故(8)存在有限时刻爆破的解。相应地,问题(6)及问题(1)存在有限时刻爆破的解。

3 整体存在

定理 2 当 $p + q \leqslant 1$ 时,(1)的每一个非负解都整体存在。

证明 由文献[11]可知,当 $p + q \leqslant 1$ 时热传导方程

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = u^q \int_0^t u^p(x,s)\mathrm{d}s, x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{12}$$

的每一个解都整体存在。显然,问题的解为(1)的上解,因而由比较原理可知问题(1)的解整体存在。

4 结论

由定理 1、定理 2 可知:当 $p + q \geqslant m$ 且 u_0 充分大时,问题(1)的解都在有限时刻爆破;而当 $p + q \leqslant 1$ 时,(1)的所有解都整体存在。

参 考 文 献

[1] Chadam J M, Yin H M. An Iteration Procedure for a Class of Integrodifferential Equations of Parabolic Type[J]. Integral Equations Appl, 1989, 2(1): 31.

[2] Souplet P. Blow-up in Nonlocal Reaction-diffusion Equations [J]. SIAM Math Anal, 1998, 29(6): 1301.

[3] Li F C, Huang S X, Xie C H. Global Existence and Blow-up of Solution to a Nonlocal Reaction-diffusion System[J]. Discrete Continu Dynam Systems, 2003, 9(6): 1519.

[4] 刘其林,邓卫兵,谢春红. 一类退化抛物方程解的存在性及爆破速率[J]. 数学学报, 2003, 46(4): 775.

[5] 吕峰,樊明书,徐思. 一类具有非线性记忆的半线性抛物方程解的爆破速率[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2009, 46(1): 29.

[6] Li Y X, Xie C H. Blow-up for Semilinear Parabolic Equations with Nonlinear Memory[J]. Z Angew Math Phys, 2004, 55(1): 15.

[7] 石立新,程正琼. 一类具有非线性记忆和吸收项的半线性抛物方程解的爆破[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2008, 45(6): 1313.

[8]Liu D M, Mu C L, Ahmed I. Blow – up for a Semilinear Parabolic Equation with Nonlinear Memory and Nonlocal Nonlinear Boundary[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2013,17(4):1353.

[9]王明新. 非线性抛物型方程[M]. 北京:科学出版社,1997.

[10]王玉兰,陈利娅,李慧芳. 具有局部化反应项的 p – Laplace 方程的整体存在指数[J]. 西华大学学报(自然科学版),2014,33(4):38.

[11]Anderson J R, Deng K,Dong Z. Global Solvability for the Heat Equation with Boundary Flux Governed by Nonlinear Memory[J]. Quart Appl Math,2011,69(4): 759.

[12]Deng K, Dong Z. Blow up for the Heat Equation with a General Memory Boundary Condition[J]. Communications on Pure Appl Anal,2012, 11(5): 2147.

[13]陈继芹,王玉兰,宋小军. 一类带记忆边界条件的抛物型方程的爆破问题[J]. 四川大学学报(自然科学版),2014,51(2):229.

[14]Anderson J R, Deng K. Global Solvability for the Porous Medium Equation with Boundary Flux Governed by Nonlinear Memory[J]. Math Anal Appl,2015, 432(2):1183.

[15]Deng K, Kwong M K, Levine H A. The Influence of Nonlocal Nonlinearities on the Long Time Behavior of Solutions of Burgers' equation[J]. Quart Appl Math, 1992,50(1): 173.

[16]Hu B, Yin H M. Critical Exponents for a System of Heat Equations Coupled in a Non – linear Boundary Condition[J]. Math Methods Appl Sci,1996,19 (14): 1099.

(编校:叶超)

(上接第24页)

模糊集,因此可以利用模糊集的相似度公式来度量直觉模糊集的隶属度与非隶属度的相似性,从而通过线性组合得到直觉模糊集的相似度计算公式。在以后的研究中,将进一步讨论这些直觉模糊集相似度的性质。

参　考　文　献

[1]Atanassov K. Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20 (1): 87.

[2]Atanassov K. Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory and Applications[J]. Physica-Verlag HD, 1999, 35(1):1.

[3]Zadeh L. Fuzzy Sets[J]. Information and Control, 1965, 8(65):338.

[4]Bustince H, Burillo P. Vague Sets are Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996,79 (3): 403.

[5]Gau W L, Buehrer D J. Vague Sets[J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, 1993,23 (2): 610.

[6]Chen S M. Measures of Similarity between Vague Sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995,74(2): 217.

[7]Hong D H, Kim C. A Note on Similarity Measures between Vague Sets and between Elements[J]. Information Sciences, 1999,115(1): 83.

[8]LI Fan,XU Zhang. Similarity Measures between Vague Sets[J]. Journal of Software, 2001 (12): 922.

[9]Li Y, Zhongxian C, Degin Y. Similarity Measures between Vague Sets and Vague Entropy[J]. Journal of Computer Science, 2002,29 (12): 129.

[10]Li D,Cheng C. New Similarity Measures of Intuitionistic Fuzzy Sets and Application to Pattern Recognitions[J]. Pattern Recognition Letters, 2002 ,23 (1): 221.

[11]Mitchell H B. On the Dengfeng-Chuntian Similarity Measure and its Application to Pattern Recognition[J]. Pattern Recognition Letters, 2003, 24 (3): 3101.

[12]Hung W L, Yang M S. Similarity Measures of Intuitionistic Fuzzy Sets Based on Hausdorff Distance[J]. Pattern Recognition Letters, 2004,25 (14): 1603.

[13]Ye J. Cosine Similarity Measures for Intuitionistic Fuzzy Sets and their Applications[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2011,53 (s1/2): 91.

[14]Boran F E, Akay D. A Biparametric Similarity Measure on Intuitionistic Fuzzy Sets with Applications to Pattern Recognition[J]. Information Sciences, 2014, 255 (1): 45.

[15]Li Y, Qin K, He X. Some New Approaches to Constructing Similarity Measures[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2014, 234 (1): 46.

(编校:饶莉)